

Аванта
Мир Энциклопедий

МАРСЕЛЬ ДАНЕЗИ

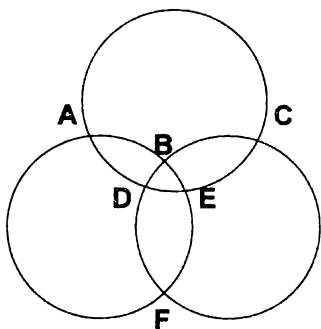
ВЕЛИЧАЙШИЕ

БИБЛИОТЕКА АВАНТЫ +
ГОЛОВОЛОМКИ МИРА

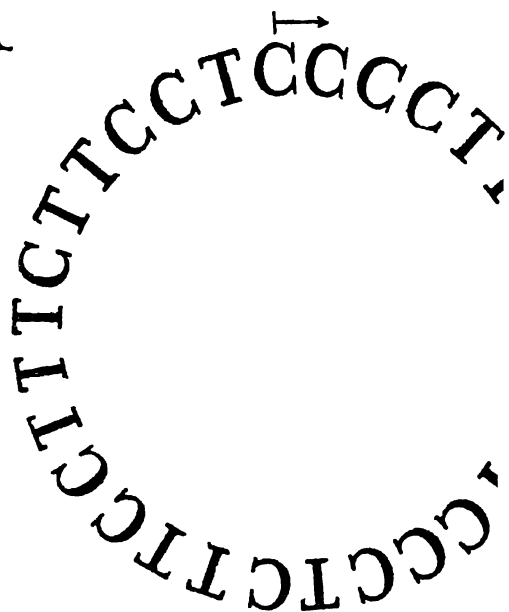




ВЕЛИЧАЙШИЕ ГОЛОВОЛОМКИ МИРА



МИР ЭНЦИКЛОПЕДИЙ АВАНТА+
АСТРЕЛЬ
МОСКВА



УДК 793.7
ББК 77.056я92
Д12

Данези, М.

Д12 Величайшие головоломки мира / Марсель Данези; пер. с англ. В. М. Герцука. — М.: Мир энциклопедий Аванта+, Астрель, 2009. — 272 с: ил.

ISBN 978-5-98986-272-6 («Мир энциклопедий Аванта+»)

ISBN 978-5-271-23647-1 («Издательство Астрель»)

(Библиотека Аванты+)

ISBN 978-5-98986-273-3 («Мир энциклопедий Аванта+»)

ISBN 978-5-271-23642-6 («Издательство Астрель»)

(Тит)

ISBN 0-471-64816-7 (англ.)

Настоящее издание представляет собой перевод оригинального издания «The Liar Paradox and the Towers of Hanoi», опубликованного в 2004 г. издательством John Wiley & Sons, Inc.

УДК 793.7
ББК 77.056я92

Научно-популярное издание

ВЕЛИЧАЙШИЕ ГОЛОВОЛОМКИ МИРА

МАРСЕЛЬ ДАНЕЗИ

Перевод с английского В. М. Герцука

Технический редактор	Е. Кудиярова
Корректор	И. Мокина
Компьютерная верстка	Е. Илюшиной

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.009937.09.08 от 15.09.2008 г.

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2;
953004 — литература научная и производственная.

ООО «Мир энциклопедий Аванта+»

109004, Москва, Б. Факельный переулок, д. 3, стр. 2

ООО «Издательство Астрель»

129085, Москва, проезд Ольминского, д. 3а.

Подписано в печать 18.02.09. Формат 60х90/16.

Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 17,00.

Библиотека Аванты+: Тираж 3 000 экз. Заказ № 9931.

Тит: Тираж 2 000 экз. Заказ № 9931.

Адрес фирменного магазина: Москва, ул. 19005 г., д. 8

Магазин работает с 10.00 до 20.00 без выходных

Адрес в Интернете: www.avanta.ru

Издание осуществлено при техническом содействии ООО «Издательство АСТ»

ОАО «Владимирская книжная типография». 600000, г. Владимир, Октябрьский пр-т, д. 7.

Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов

© ООО «Издательство Астрель», 2009
Copyright © 2004 by Marcel Danesi



Алексу и Саре; их существование — дар,
их жизнь — благословение.

СОДЕРЖАНИЕ

БЛАГОДАРНОСТИ 6

Введение 7

❖ 1 ❖ Загадка Сфинкса 11

❖ 2 ❖ Волк, коза и капуста 33

❖ 3 ❖ Кролики Фибоначчи 54

❖ 4 ❖ Эйлер и Кенигсбергские мосты 77

❖ 5 ❖ Задача Гурти о четырех красках 98

❖ 6 ❖ Головоломка Люка «Ханойские башни» 119

❖ 7 ❖ Головоломка Лойда «Таинственное исчезновение» 142

❖ 8 ❖ Парадокс Эпименида «Лжец» 159

❖ 9 ❖ Магический квадрат Ло Шу 178

❖ 10 ❖ Критский лабиринт 197

ОТВЕТЫ И ПОЯСНЕНИЯ 213

ГЛОССАРИЙ 264

БЛАГОДАРНОСТИ

Я хочу поблагодарить многих людей, которые помогали мне, оказывали влияние и критиковали в течение многих лет. Прежде всего, я должен выразить благодарность всем студентам, которых я имел удовольствие обучать в университете Торонто. Они были постоянным источником моего интеллектуального роста и обогащения. Я также должен поблагодарить профессора Фрэнка Нусселя из университета Луизианы за его неослабевающую помощь в течение многих лет. Я, безусловно, благодарен сотрудникам издательства Джона Уайли, оказавшим мне поддержку при предоставлении этого манускрипта на рассмотрение издательского дома, известного своей заинтересованностью в математическом образовании. Это моя вторая книга, выходящая в издательстве Уайли. Я благодарен, в частности, Стефену Пауэру, Джефу Голику и Майклу Томпсону за их квалифицированные советы, а также Кимберли Монро-Хилл и Патрисии Уальдигоу за великолепное редактирование моего труда, значительно улучшившее его пригодность для чтения. Необходимо заметить, что любые неточности, которые могут обнаружиться в книге, лежат исключительно на моей совести.

В заключение хочу выразить сердечную благодарность моей семье — Люси (мой жене), Александру и Саре (моим внукам), Дэниелэй (моей дочери), Крису (моему зятю) и Денилоу (моему отцу) — за терпение, которое они проявили во время, когда я занимался моими исследованиями и писал эту книгу. Я прошу их забыть мою сварливость и пренебрежение семейными обязанностями в этот период.

Введение

Головоломки так же стары, как история человечества. Их обнаруживают в культурах на протяжении веков. Почему так происходит? Какую информацию дают головоломки о природе человеческого мышления? Помогают ли они изучать математику?

Книга, которую вы держите в руках, отвечает на некоторые из этих вопросов. Главной ее задачей было показать, как некоторые идеи в математике возникали в форме головоломок. Я использую слово **головоломка** в его основном смысле, который служит для обозначения трудной задачи, скрывающей неочевидный ответ. Я не пользуюсь переносным смыслом этого слова, означающим «нечто, остающееся неразрешенным», несмотря на то, что эти два значения делят между собой большую семантическую территорию, как недавно продемонстрировал математик Кейт Дэвлин в своей замечательной книге о семи величайших неразрешимых математических задачах-головоломках нашего времени (Keith Devlin, *The Millennium Problems*, Basic Books, 2002). В литературе и искусстве существует давно устоявшаяся традиция выбирать шедевры — великие романы, великие симфонии, великие полотна — в качестве наиболее вдохновляющих объектов для изучения. О них пишут книги, им посвящают курсы лекций. В математике тоже есть свои «великие» задачи. Показательно то, что в своем большинстве они первоначально были выдуманы как хитроумные головоломки. Поэтому, следуя педагогической практике в области литературы, музыки и изящных ис-

кусств, мы представим в этой книге фундаментальные математические идеи с помощью десяти головоломок-шедевров. На протяжении всей истории появлялось множество изощренных головоломок, и было бы наглой самонадеянностью утверждать, что я выбрал из них десять наилучших. В действительности я лишь продолжил математические раскопки, чтобы извлечь десять головоломок, которые играют, очевидно, центральную роль в формировании истории математики, и которые, как я убежден, большинство математиков также сочло бы наиболее важными из когда-либо изобретенных.

Цели этой книги

Помимо прочего, эту книгу можно читать, чтобы получить базовые представления о том, что такое головоломки вообще, и чтобы осознать их важность для математики. Те, кто желает овладеть основами искусства решать головоломки и производить действия в элементарной математике, также могут с успехом воспользоваться ею в качестве руководства для самообучения. Однако она не задумана как собрание головоломок, олимпиадных задач или чего-то в этом роде. Скорее, она является пособием по установлению связей между головоломками и математикой. Одним словом, она написана для «новичков», а не для заядлых решателей головоломок.

Преподаватели обнаружат, что она охватывает ряд тем, содержащихся в более традиционных вводных математических курсах, хотя и подходит к ним с иной точки зрения, более побуждающей к творчеству. Учащиеся могут обсудить каждую головоломку и ее значение для изучения математики. Они также могут предлагать свои собственные головоломки или предпринять дальнейшее исследование каждой из великих головоломок.

Настоящая книга основана на материалах, подготовленных мною для курса, который в течение десяти лет я читал вольным слушателям в университете Торонто. Этот курс был предназначен для лиц, испытывающих страх перед математикой. Я постепенно обнаружил, что вовлеченность в решение головоломок позволяет таким студентам приобрести уверенность и продолжать изучение более сложных областей математики с меньшими трудностями или вовсе без них. Электронные письма с поздравлениями, которые я получаю от своих бывших студентов по праздничным дням, служат для меня источником большой гордости. Ничто не делает преподавателя более сча-

стливым, чем свидетельства того, что его студенты стали знатоками предмета, которому он их учил! Я буду поистине счастлив, если эта книга позволит читателям достичь подобных результатов.

Форма

Каждая из десяти глав поделена на четыре части: Головоломка, Математические комментарии, Заключительные замечания и Упражнения.

Головоломка

Каждая головоломка разъясняется легким для восприятия способом. Строгое следование первоначально предложенным решениям и вытекающим из них математическим следствиям сделало бы некоторые из головоломок чрезвычайно трудными для понимания. Для подобных случаев я провел соответствующие видоизменения. Тем не менее я старался сохранить дух каждой головоломки и ее решения. Моя книга рассчитана на небольшой объем исходных знаний читателей. Каждый математический символ, обозначение, формула и понятие, появляющиеся в ходе обсуждения, полностью разъясняются. Например, если в некотором месте требуется знать, что такое показатель степени, я привожу в выделенном блоке краткое пояснительное замечание по этому вопросу.

Математические комментарии

Далее следует обсуждение каждой головоломки в виде комментариев, касающихся ее значения для специальной области математики или для математики в целом. Каждый вводимый в обсуждение термин полностью разъясняется. Даже такие общеизвестные понятия, как *простое число* и *составное число*. Для удобства читателей в конце книги приводится глоссарий терминов. Я предполагаю, что читатель знает, как выполнять основные математические операции, такие как сложение, вычитание, умножение и деление, и представляет себе в общих чертах, что такое равенство. А именно, что **равенство (уравнение)** есть утверждение, что два выражения равны или означают одно и то же. Оно обычно записывается в виде строки символов, разделенной на правую и левую части, соединяемые зна-

ком равенства ($=$). Например, в равенстве $x + 5 = 8$, выражение $(x + 5)$ является левой частью уравнения, а число 8 правой частью. Левая часть этого уравнения будет равна правой, если букву x заменить на число 3: $3 + 5 = 8$. Как я уже говорил, по существу, специальных знаний вам не потребуется.

Заключительные замечания

После математических комментариев я привожу свои собственные соображения о головоломке или ее математических следствиях.

Упражнения

В этом разделе содержатся дополнительные упражнения, позволяющие читателю непосредственно включиться в решение головоломки. Ответы и подробные пояснения к упражнениям можно найти в конце книги. Приводятся некоторые соображения, наводящие на ответ. Не стоит разочаровываться, если поначалу у вас возникнут трудности при выполнении некоторых упражнений. Приложите максимальные усилия к их решению, прежде чем обратиться к объяснениям в конце книги. Это поможет вам уловить дух головоломки.

Упражнения имеют сквозную нумерацию через все главы. Читателям, которые, возможно, предпочтут воспользоваться этой книгой в качестве полезного пособия по решению головоломок, это позволит непосредственно перейти к последовательному решению упражнений. Здесь вы найдете восемьдесят пять задач-головоломок — не меньше, чем обычно содержит большая часть поступающих в продажу сборников головоломок.



Загадка Сфинкса

Вообразим, что мы все отчасти безумны.
Это позволит нам многое объяснить друг
в друге; это даст нам возможность разгадать
многие загадки; это сделает ясными и простыми
многие вещи, которые сейчас содержат
навязчивые и тревожащие трудности
и темные места.

МАРК ТВЕН (1835–1910)

Если мы сегодня посетим египетский город Гиза, наше воображение, безусловно, поразит массивная скульптура, известная как Великий Сфинкс, чудовище с головой и грудью женщины, телом льва, хвостом змеи и крыльями птицы. Созданный ранее 2500 г. до н.э. Великий Сфинкс величественно простирается на 73 м в длину и возвышается над нами на 20 м. Ширина его лица составляет впечатляющие 4,17 м.

Легенда утверждает, что столь же огромный сфинкс охранял ворота древнего города Фивы. Первая известная в человеческой истории головоломка появилась из этой самой легенды. Загадка Сфинкса, как ее принято называть, является не только отправным пунктом этой книги, но и начальной точкой изучения связей меж-

ду головоломками и математическими идеями. Как самая ранняя головоломка в истории человечества, она включена в десять величайших головоломок всех времен. Головоломки являются настолько всеобщим явлением, что мы едва ли сможем полностью понять, что они такое. Их притягательность не знает ни возраста, ни эпохи. Когда детям задают простую загадку, например, «Почему цыпленок переходит дорогу?», они без малейших колебаний начинают искать на нее ответ, как бы побуждаемые к этому неким бессознательным инстинктом.

У читателей может возникнуть вопрос, какое отношение к математике может иметь загадка, спрятанная в тексте мифа. Ответ на него станет очевидным, когда они изучат эту главу. Несмотря на простую формулировку, загадка Сфинкса в своей глубинной структуре является моделью развертывания так называемого мышления посредством озарения. А эта форма мышления связана со всеми математическими открытиями.

Загадка

Согласно легенде, когда Эдип приблизился к городу Фивы, он столкнулся с гигантским Сфинксом, охранявшим ворота города. Грозное существо встало перед героем мифа и загадало ему следующую загадку, предупредив, что если ответ будет неверным, Эдип немедленно умрет в лапах сфинкса:

Кто утром ходит на четырех ногах, днем на двух, а вечером на трех?

Бесстрашный Эдип ответил: «Этот человек ребенком ползает на четвереньках, ходит на двух ногах, когда вырастет, а в старости вынужден при ходьбе опираться на палку». Услышав верный ответ, удивленный Сфинкс покончил с собой, а Эдип вошел в Фивы как герой, избавивший горожан от ужасного чудовища, столь долго державшего их в плену.

Существуют разные версии этой загадки. Одна из самых ранних версий обнаружена в трагедии «Царь Эдип» древнегреческого драматурга Софокла (496—406 до н.э.). Следующая формулировка, датировка которой также возводит ее к античности, является еще одним общепринятым вариантом загадки:

МИФ ОБ ЭДИПЕ

В греческой мифологии дельфийский оракул предсказал Лаю, царю Фив, что сын, которого родит ему жена, царица Иокаста, убьет его, когда вырастет. Поэтому, когда Иокаста родила сына, Лай приказал отнести младенца на гору и оставить там умирать. Как и должно было случиться в согласии с пророчеством, его спас пастух и отнес к царю Коринфа Полибу, который усыновил мальчика и дал ему имя Эдип.

В юности Эдип узнал о зловещем прорицании. Чтобы избежать его исполнения, Эдип, считавший Полиба своим настоящим отцом, бежал из этих мест в Фивы. По дороге Эдип убил незнакомца, завязавшего с ним ссору. У ворот Фив его остановил огромный Сфинкс, угрожавший Эдипу смертью, если тот не разгадает загадку. Эдип разгадал загадку, в результате чего Сфинкс покончил с собой. За то, что Эдип освободил их от чудовища, фиванцы просили его стать царем Фив. Он принял предложение и женился на вдовствующей царице Иокасте.

Несколько лет спустя Фивы были поражены моровой язвой. Оракул сообщил, что мору придет конец, когда из Фив будет изгнан убийца царя Лая. Эдип расследовал убийство и обнаружил, что человеком, которого он убил по дороге в Фивы, был Лай. К своему ужасу, он узнал также, что Лай был его настоящим отцом, а Иокаста матерью. В отчаянии Эдип ослепил себя. Иокаста повесилась. Эдипа изгнали из Фив. Так сбылось дельфийское прорицание.

Кто сначала имеет только голос, затем становится четырехногим, затем двуногим, и, наконец, трехногим?

Какова бы ни была ее версия, Загадка Сфинкса является прототипом всех загадок (и головоломок, предмета этой книги). Она преднамеренно задумана так, чтобы спрятать неочевидный ответ, а именно, что три фазы жизни, детство, зрелость и старость, сравнимы, соответственно, с тремя фазами дня (утро, день и вечер). Более того, ее функция в истории Эдипа предполагает, что головоломки могут возникать как тесты для проверки сообразительности, и являются таким образом испытанием человеческого ума. Библейская история о Самсоне служит еще одним подтверждением этому. На свадебном пиршестве Самсон, видимо, желая

произвести впечатление на родственников своей будущей жены, предложил своим гостям-филистимлянам следующую загадку (Суд. 14, 14):

Из ядушего вышло ядомое, и из сильного вышло сладкое.

Он дал филистимлянам семь дней на разгадывание, в уверенности, что они не способны разгадать ее. Самсон зашифровал в своей загадке то, чему он однажды стал свидетелем — рой пчел, который произвел мед в трупѣ льва. Таким образом, шифр его загадки: «ядущий» = «лев»; «ядомое» = «мед»; «сильный» = «лев», «сладкое» = «мед». Вероломные гости, однако, потратили семь дней, чтобы попытаться ответить у жены Самсона. Когда они дали Самсону правильный ответ, могучий библейский герой разгневался и объявил войну всем филистимлянам. Последовавший за этим конфликт в конечном счете привел к его собственной гибели.

Древние видели в загадках способ проверки умственных способностей и, следовательно, средство получения знаний. Этим объясняется то, что греческие жрецы и жрицы (именуемые оракулами) выражали свои прорицания в форме загадок. Они, очевидно, втайне хотели, чтобы только люди, способные проникнуть в язык послания, могли разгадать скрытое в нем пророчество.

Однако не все загадки были придуманы для проверки проницательности мифических героев. Библейские цари Соломон и Хирам, например, устраивали состязания в загадках просто ради удовольствия перехитрить друг друга. Древние римляне превратили загадки в развлечения сатурналий, религиозных празднеств, проходивших с 17 до 23 декабря. К четвертому столетию нашей эры загадки стали настолько популярными из-за их «развлекательной ценности», что память об их мифологическом происхождении стала блекнуть. В десятом веке арабские ученые использовали загадки в педагогических целях, а именно, для того, чтобы обучить студентов права разбираться в лингвистических двусмысленностях. Это происходило одновременно с возникновением первых юридических школ в Европе.

Вскоре после появления в XV веке печатных изданий, первые из когда-либо напечатанных для развлечения публики книжек были нередко собраниями загадок. Одна из них, имеющая заголовок «Увеселительная книга загадок», была издана в 1575 г. Вот загадка из этого труда.

У бревна ее поймал,
наклонялся и искал,
но найти не удалось,
и тащить домой пришлось.

(ответ: засевшая в ноге заноза)

К XVIII веку загадки регулярно включаются во многие газеты и периодические издания. Писатели и ученые часто придумывают загадки. Например, американский изобретатель загадок Бенджамин Франклин (1706—1790) создавал их под псевдонимом Ричард Саундер. Он включил их в свою книгу *Poor Richard's Almanack*, впервые опубликованную в 1732 г. Альманах имел неожиданный успех, в значительной мере благодаря разделу загадок. Во Франции великий сатирик Вольтер (1694—1778), литературная фигура не меньшего масштаба, сочинял головоломные загадки, такие как, например, следующая:

Что является самым длинным и самым коротким, самым быстрым и самым медленным, самым делимым и самым протяженным, самым оплакиваемым и самым пренебрегаемым, без чего ничего нельзя сделать и с чем ничего нельзя сделать, что разрушает все малое и прославляет все великое?

(ответ: время)

Все возрастающая популярность загадок в XIX веке поставила на повестку дня вопрос об увеличении их разнообразия. Это привело к созданию нового жанра загадок, называемых *шарадами*. В шарадах угадывают один слог или одну строку за один раз путем угадывания значений, предлагаемых отдельными слогами, словами или строками. В XIX веке это привело к появлению *живых шарад*, которые стали и остаются поныне весьма популярной игрой в компаниях и на вечеринках. Они разыгрываются членами двух разных команд, которые представляют значение слога в слове, целого слова или фразы посредством пантомимы. Например, если ответом на шараду является слово «бейсбол» («baseball»), то в пантомиме обычно изображают слоги «бейс» («base» — база, основание) и «бол» («ball» — мяч). К концу века загадки прочно утвердились в культуре развлечений Европы и Америки и остаются в ней по сей день.

Математические комментарии

Загадка, которую задал Эдипу легендарный Сфинкс, поначалу кажется не поддающейся решению. Какое же странное существо может иметь четыре ноги, потом две, а затем три, причем именно в этом порядке? Получение ответа на эту загадку требует от нас не линейного, а образного мышления. Именно такой тип образного мышления лежит в основе всех настоящих математических исследований.

Решение задач

МЕТОДЫ И СТРАТЕГИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Дедукция: предполагает использование для решения задачи уже имеющихся знаний

Индукция: предполагает обнаружение общего заключения, исходя из частных фактов, имеющихся в задаче.

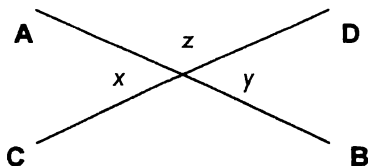
Мышление посредством озарения: предполагает выдвижение догадок или следование интуитивным предчувствиям, возникающим при подходе к задаче методом проб и ошибок.

Загадки, предлагаемые в качестве головоломок, вообще говоря, отличаются от обычных математических задач, встречающихся в школьных учебниках. Последние составляются так, чтобы помочь научиться выполнять определенные действия на регулярной основе (например, складывать большие числа, решать уравнения, доказывать теоремы, и т.д.). Чтобы уловить различие, рассмотрим две типичные задачи из учебника. Первая из них такова:

Докажите, что противоположные углы, образованные двумя пересекающимися прямыми, равны.

Метод, используемый для решения задач такого типа, называется **дедукцией**. Он предполагает использование уже имеющихся знаний для решения данной задачи.

Начнем с черчения диаграммы, на которой показаны все необходимые детали задачи. Две прямые линии обозначим буквами **AB** и **CD**, а углы, принадлежащие одной из двух пар противоположных углов, пометим символами x и y . Обозначим один из углов, лежащих между x и y , символом z , как показано на рисунке:



В задаче, по сути, требуется доказать, что x и y , будучи противоположными углами равны. Конечно, имеются и два других противоположных угла, образованных пересечением двух линий, но их рассматривать нет необходимости, поскольку метод доказательства и результат будут теми же самыми. Доказательство основывается на уже имеющемся знании, а именно, знании того, что прямая представляет собой два луча, исходящих из любой ее точки под углом 180 градусов друг к другу. Рассмотрим сначала линию **CD**. Будучи прямой, она задает (как было упомянуто) угол в 180 градусов. Заметим, что он состоит из двух меньших углов x и z , показанных на рисунке. Поэтому, логически, два этих угла в сумме должны давать 180 градусов. Это утверждение можно записать в виде равенства $x + z = 180^\circ$, которое читается как: «Угол x и угол z , будучи сложенными, составляют 180° ».

Рассмотрим теперь угол, задаваемый прямой **AB**. Заметим, что он также состоит из двух меньших углов y и z , показанных на рисунке. Эти два угла в сумме также должны давать 180 градусов — факт, который можно представить в виде уравнения $y + z = 180^\circ$. Два полученных уравнения можно записать следующим образом:

1. $x + z = 180^\circ$
2. $y + z = 180^\circ$.

Их можно переписать в виде

3. $x = 180^\circ - z$
4. $y = 180^\circ - z$

Если вы подзабыли алгебру средней школы, напомним, что основанием для этой операции является тот факт, что действие, произведенное с одной стороной уравнения, должно быть проделано и с другой. Представьте себе две стороны уравнения как две чашки рычажных весов, с одинаковым грузом в каждой чашке. Эти грузы аналогичны выражениям с каждой стороны уравнения. Если мы хотим поддерживать равновесие и взяли с одной чашки (например, с левой) некоторый вес, то мы должны снять такой же вес с другой (правой) чашки. Подобным же образом, если мы вычтем z из левой части уравнения 1, мы должны вычесть его и из правой части. Результатом этого является уравнение 3, которое демонстрирует, что z было вычтено из обеих частей. Заметим, что вычитание z из самого себя в левой стороне ($z - z$) дает в результате 0, что обычно не записывается. Вычитание z из обеих частей уравнения 2 дает уравнение 4.

Теперь, поскольку две вещи, равные третьей, равны между собой (например, если Алекс имеет рост шесть футов и Сара имеет рост шесть футов, то эти два человека имеют один и тот же рост), мы можем заключить, что $x = y$, ибо уравнение 3 показывает, что x равно $(180^\circ - z)$, а уравнение 4 показывает, что y равно тому же выражению $(180^\circ - z)$. Нет необходимости выяснять численное значение этого выражения. Каково бы оно ни было, тот факт, что ему равны как x так и y , остается неизменным. Теперь мы можем заключить, что «любые два противоположных угла, образованных двумя пересекающимися прямыми, равны», так как мы не приписываем этим углам определенного значения. Когда доказательство можно обобщить таким образом, оно называется **теоремой**.

МНОГОУГОЛЬНИКИ

Многоугольник представляет собой плоскую (двумерную) фигуру. Примерами многоугольников являются треугольники, четырехугольники (фигуры с четырьмя сторонами), такие как прямоугольники и квадраты, пятиугольники (фигуры с пятью сторонами) и шестиугольники (фигуры с шестью сторонами).

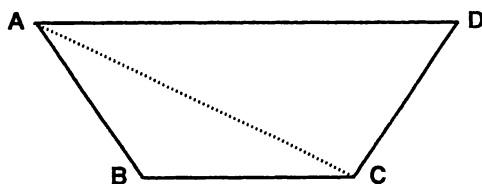
Сумма трех углов любого треугольника равна 180° , независимо от того, какого он типа (см. главу 5).

А вот вторая задача из учебника:

Выведите формулу для суммы углов произвольного многоугольника.*

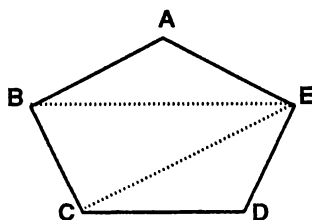
Для решения этой задачи привлекаются различные виды стратегии, известной как **индукция**. Она представляет собой получение обобщения на основе наблюдаемых фактов. Рассмотрим сперва треугольник — **многоугольник** с наименьшим числом сторон. Сумма углов в треугольнике равна 180 градусов* (см. соответствующее доказательство в главе 5).

Рассмотрим далее произвольный четырехугольник (фигуру с четырьмя сторонами). Одной из таких фигур, с угловыми точками **A**, **B**, **C** и **D**, является следующая:



Заметим, что эту фигуру можно с помощью лучей, соединяющих одну вершину со всеми другими, разделить на два треугольника, как показано на рисунке (треугольник **ABC** и треугольник **ADC**). Прodelав это, мы обнаруживаем, что сумма углов четырехугольника эквивалентна сумме углов двух треугольников, а именно, $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$.

Далее рассмотрим случай пятиугольника (фигуры с пятью сторонами). Одной из таких фигур, с угловыми точками **A**, **B**, **C**, **D** и **E** является следующая:



*Следует иметь в виду, что речь далее идет лишь о выпуклых многоугольниках. Фигура называется **выпуклой**, если все точки отрезка, который соединяет любые две точки, лежащие внутри ее границ, также находятся внутри этих границ. (**Примеч. пер.**)

Поскольку пятиугольник с помощью лучей, соединяющих одну вершину со всеми другими, можно разделить на три треугольника, как показано на рисунке (треугольник **ABE**, треугольник **BEC** и треугольник **ECD**), мы снова обнаруживаем простой факт, а именно, что сумма его углов эквивалентна сумме углов трех треугольников: $180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 540^\circ$.

Продолжая таким образом, можно так же легко показать, что сумма углов шестиугольника (фигуры с шестью сторонами) равна сумме углов четырех треугольников, сумма углов семиугольника (фигуры с семью сторонами) равна сумме углов пяти треугольников, и так далее. Давайте теперь попытаемся обобщить то, что мы наглядно обнаружили. Будем использовать букву *n* для обозначения числа сторон, а термин *n*-угольник используем для обозначения произвольного многоугольника, то есть многоугольника с нефиксированным числом сторон. Предшествующие наблюдения подсказывают нам, что число треугольников, на которые можно разделить любой многоугольник с помощью лучей, соединяющих одну вершину со всеми другими, «на две единицы меньше», чем число сторон, его образующих. Например, четырехугольник мы можем разделить на два треугольника, то есть «на две единицы меньше», чем число его сторон (4), или $(4 - 2)$; пятиугольник мы можем разделить на три треугольника, то есть опять «на две единицы меньше», чем число его сторон (5), или $(5 - 2)$; и так далее. В случае треугольника это правило тоже действует, поскольку с помощью лучей, соединяющих одну вершину со всеми другими, мы можем «разделить» его на один и только один треугольник: самого себя. Это число также «на две единицы меньше», чем число его сторон (3), или $(3 - 2)$. Таким образом, *n*-угольник мы можем разделить на $n - 2$ треугольника. Подведем итог:

ТАБЛИЦА 1–1: ПОДСЧЕТ ЧИСЛА ТРЕУГОЛЬНИКОВ В МНОГОУГОЛЬНИКЕ

Число сторон многоугольника	Число треугольников, входящих в многоугольник
3 (= треугольник)	$(3 - 2) = 1$ треугольник
4 (= четырехугольник)	$(4 - 2) = 2$ треугольника
5 (= пятиугольник)	$(5 - 2) = 3$ треугольника
6 (= шестиугольник)	$(6 - 2) = 4$ треугольника
7 (= семиугольник)	$(7 - 2) = 5$ треугольников
...	...
n (= <i>n</i> -угольник)	$(n - 2)$ треугольника

Поскольку мы знаем, что в треугольнике 180° градусов, в четырехугольнике будет $(4 - 2) 180^\circ$, в пятиугольнике $(5 - 2) 180^\circ$, и так далее. Тогда в n -угольнике будет $(n - 2) 180^\circ$:

ТАБЛИЦА 1–2: ОПРЕДЕЛЕНИЕ СУММЫ УГЛОВ МНОГОУГОЛЬНИКА

Число сторон многоугольника	Число треугольников, входящих в многоугольник	Сумма углов многоугольника
3	$(3 - 2) = 1$	$180^\circ \times 1 = 180^\circ$
4	$(4 - 2) = 2$	$180^\circ \times 2 = 360^\circ$
5	$(5 - 2) = 3$	$180^\circ \times 3 = 540^\circ$
6	$(6 - 2) = 4$	$180^\circ \times 4 = 720^\circ$
7	$(7 - 2) = 5$	$180^\circ \times 5 = 900^\circ$
...
n	$(n - 2)$	$180^\circ \times (n - 2) = 180^\circ (n - 2)$

Формулу можно записать в виде

$$(n - 2) 180^\circ$$

или

$$180^\circ (n - 2).$$

Теперь мы можем определять сумму углов многоугольника непосредственно. Например, в случае восьмиугольника $n = 8$. Подставив это число в формулу, мы получим сумму углов восьмиугольника:

$$(n - 2) 180^\circ = (8 - 2) 180^\circ = 6 \times 180^\circ = 1080^\circ.$$

В приведенной задаче важно то, что решение получено путем обобщения отдельных примеров. Именно это составляет результат и сущность рассуждений по индукции. Однако по отношению к таким рассуждениям следует проявлять осторожность. Рассмотрим следующие арифметические вычисления — умножение слева и сложение справа:

Умножение = **Сложение?**

$$2 \times 2 = 4$$

$$2 + 2 = 4$$

$$\left(\frac{3}{2}\right) \times 3 = 4\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} + 3 = 4\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right) \times 4 = 5\frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{3} + 4 = 5\frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right) \times 5 = 6\frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{4} + 5 = 6\frac{1}{4}$$

КОММУТАТИВНОСТЬ

Изменение порядка сомножителей (чисел) при умножении не меняет результата (произведения). Это свойство умножения известно как **коммутативность**. Примеры:

$$2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$$

$$4 \times 9 = 9 \times 4 = 36$$

Вообще

$$n \times m = m \times n$$

Это также можно записать в виде

$$nm = mn$$

Поэтому, применив принцип коммутативности к нашему случаю, получаем

$$180^\circ (n - 2) = (n - 2) 180^\circ.$$

Этим же свойством, между прочим, обладает сложение. Примеры:

$$2 + 3 = 3 + 2 = 5$$

$$4 + 9 = 9 + 4 = 13$$

Вообще

$$n + m = m + n$$

Как вы можете сами видеть, свойство коммутативности не выполняется для вычитания и деления (обозначение \neq используется для понятия «не равно»). Некоторые примеры:

$$7 - 4 \neq 4 - 7$$

$$9 : 3 \neq 3 : 9$$

Из этих примеров можно заключить, что умножение двух чисел всегда дает тот же самый результат, что и их сложение. Но это, разумеется, будет неверным выводом. Поэтому, чтобы для решения задачи можно было использовать метод индукции, должны быть выполнены некоторые условия. Мы вернемся к этой теме в главе 5.

Мышление посредством озарения

Загадка Сфинкса отличается от задач, только что нами решенных, тем, что здесь невозможно предвидеть стратегию решения. Разрешение загадки требует мышления посредством озарения. Такое мышление можно охарактеризовать как результат интуитивного проникновения во внутреннюю или скрытую природу задачи. Первая в истории человечества головоломка служит моделью для использования мышления посредством озарения.

Понимание того, что слова следует интерпретировать не буквально, а метафорически, является тем самым озарением, которое подходит для разрешения Загадки Сфинкса. Многие англоязычные загадки основаны на неоднозначности смысла слов. Рассмотрим следующий пример:

What has four wheels and flies?

(Что имеет четыре колеса и летает?)

(ответ: мусоровоз)

Этот ответ имеет смысл, только если мы осознаем, что английское слово *flies* имеет два значения: глагол «летает» и существительное «мухи». Мусоровоз, конечно, имеет «четыре колеса» («four wheels»), и кружащихся вокруг него «мух» («flies»), которых привлекает мусор.

Возможно, будет поучительно осмотреть закоулки вокруг нас и найти свои собственные загадки. Возьмем, например, слово «улыбка». Улыбка иногда бывает, как говорится, «приклеенной», подобно объявлению или афише. А иногда улыбку «стирают» с лица, как надпись с доски. Теперь мы можем с успехом использовать эти особенности языка для формулирования загадки:

Я не афиша и не надпись, но меня можно, когда понадобится, приклеить и стереть. Что я такое?

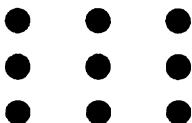
Иногда загадки можно сочинять ради шутки. Возьмем, например, классическую английскую детскую загадку «Почему цыпленок переходит дорогу?». Число ответов на этот вопрос бесконечно. Вот лишь три возможных ответа:

1. Потому что хочет попасть на другую сторону.
2. Потому что его подгоняет хозяйка.
3. Потому что за ним гонится лиса.

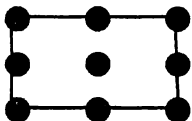
Все три ответа имеют целью вызвать определенный смех, подобный тому, который возникает в кульминационный момент рассказывания анекдота. Загадки этого типа демонстрируют, что они имеют немало общего с юмором.

Мышление посредством озарения является характерным для решения большинства, если не всех, головоломок. Рассмотрим, например, следующую классическую головоломку:

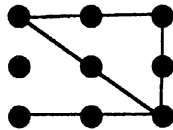
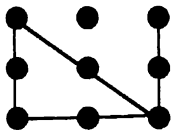
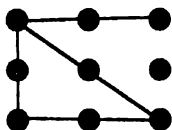
Не отрывая карандаша от бумаги, соединить следующие девять точек четырьмя прямыми линиями.



Сначала люди пытаются решать эту задачу, соединяя точки, как если бы они были расположены на периметре (границе) воображаемого квадрата или плоского ящика:



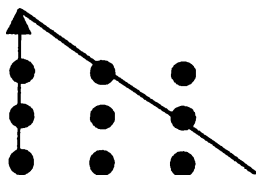
Но такое прочтение головоломки не приводит к решению, независимо от того, сколько раз пытаются провести четыре прямые линии без отрыва карандаша. Одна точка всегда остается лишней, как показывают следующие три попытки:



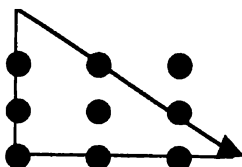
На этом месте в игру вступает интуиция: «Что случится, если я выведу одну или несколько линий за пределы ящика?» Это подозрение и в самом деле оказывается подходящей догадкой.

Начнем с помещения карандаша, скажем, в нижнюю левую точку, и проведем прямую линию через две точки, расположенные над

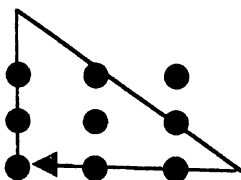
ней, остановившись в той точке «вне ящика», из которой можно увидеть диагональ, содержащую две точки. Можно начать с любой из угловых точек и опять получить решение (если вы пожелаете проделать это самостоятельно):



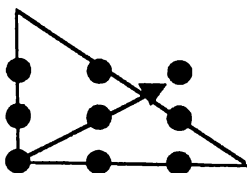
Проводим далее прямую линию диагонально вниз через две точки. Останавливаемся, когда видим, что вторая линия упирается в горизонтальную линию, на которой расположены три нижние точки:



Проводим третью линию через нижние точки:



Наконец, проводим четвертую линию через оставшиеся точки:



Между прочим, эта головоломка по самоочевидным причинам может служить прототипом известного выражения «думать, выходя за рамки».

Решение головоломок иногда может потребовать использования и других форм размышления. Но обращенный к интуиции метод проб и ошибок все-таки преобладает. Слово «головоломка», очевидно, происходит от выражения «ломать голову», что обычно приходится делать, когда мы приведены в замешательство, поставлены в тупик. Это удачный термин, поскольку, если не считать типичных задач из математических учебников, головоломки сначала порождают ощущение тупика, но в то же время бросают вызов остроте нашего ума. Как утверждает Хелен Хованек в своей восхитительной книге «Рай головоломок», притягательная сила головоломок заложена в том, что они «одновременно утаивают ответ и вызывают к решению», провоцируя читателей противопоставить «свою собственную изобретательность изобретательности их создателей».

Рассмотрим одну более классическую головоломку, которую придумал французский ученый монах ордена иезуитов и поэт Клод-Гаспар Боше де Мезирак (1581–1638), головоломку, которую он включил в свое собрание 1612 г., озаглавленное «Удивительные и восхитительные числовые задачи»:

Каково наименьшее число гирь весом в 1 фунт, требуемых для взвешивания любого целого числа фунтов сахара от 1 до 40 включительно, если эти гири можно класть на любую чашу весов?

Мы можем поначалу не устоять перед соблазном сделать заключение, что для решения подходят гири в 1, 2, 4, 8, 16 и 32 фунта. Рассуждения при этом могут быть следующими. Мы можем взвесить 1 фунт сахара, положив гирю в 1 фунт на левую чашку и насыпая сахар в правую чашку до тех пор, пока не установится равновесие. Мы можем взвесить 2 фунта сахара, положив гирю в 2 фунта на левую чашку и насыпая сахар в правую чашку до тех пор, пока не установится равновесие. Мы можем взвесить 3 фунта сахара, положив гирю в 1 фунт и гирю в 2 фунта на левую чашку и насыпая сахар в правую чашку до тех пор, пока не установится равновесие. И так далее, и тому подобное. Таким образом, мы сможем взвесить любое целое число фунтов сахара от 1 до 40 фунтов.

Однако поскольку условие головоломки позволяет нам класть гири на обе чашки весов, взвешивание может быть проделано — ага! — с помощью всего лишь четырех гирь в 1, 3, 9 и 27 фунтов. Причина этого замечательно проста: помещение гири на правую чашку весов,

ПОКАЗАТЕЛИ СТЕПЕНИ

Показатель степени представляет собой цифру или букву, помещаемую справа наверху от числа. Он указывает, сколько раз число должно быть умножено на само себя. Например, в выражении 3^4 верхняя цифра 4 указывает, что число 3 следует умножить на само себя четыре раза:

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

Выражение 3^4 читается как «3 в степени четыре» или «3 в четвертой степени».

Представление в виде степени является сокращенной формой для записи повторного умножения. Примеры:

$$2^1 = 2$$

$$3^2 = 3 \times 3$$

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5$$

$$\dots \dots \dots n^4 = n \times n \times n \times n$$

Любое число в нулевой степени всегда равно 1, независимо от того, какое это число (см. главу 6). Примеры:

$$3^0 = 1$$

$$9^0 = 1$$

$$\dots \dots \dots n^0 = 1$$

вместе с сахаром эквивалентно вычитанию ее веса из полного груза на левой чашке. Подумаем минутку об этом. Например, для взвешивания 2 фунтов сахара мы должны положить на левую чашку гирию в 3 фунта, а на правую чашку гирию в 1 фунт. В результате на правой чашке окажется на два фунта меньше. Поэтому мы установим равновесие, когда насыплем в правую чашку 2 фунта сахара.

Эти четыре веса, при ближайшем рассмотрении, оказываются степенями числа 3:

$$1 = 3^0$$

$$3 = 3^1$$

$$9 = 3^2$$

$$27 = 3^3$$

Такой выбор гирь оказывается подходящим, поскольку каждое и целых чисел от 1 до 40 (требуемые веса) оказывается либо степенью 3, либо на единицу больше или меньше степени 3. Поэтому каждое из первых сорока целых чисел может быть выражено через первые четыре степени 3:

$$\begin{array}{ll}
 1 = 3^0 & (= 1) \\
 2 = 3^1 - 3^0 & (= 3 - 1) \\
 3 = 3^1 & (= 3) \\
 4 = 3^1 + 3^0 & (= 3 + 1) \\
 5 = 3^2 - 3^1 - 3^0 = 3^2 - (3^1 + 3^0) & (= 9 - 3 - 1 = 6 - 1) \\
 \dots & \dots \\
 40 = 3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0 & (= 27 + 9 + 3 + 1 = 39 + 1)
 \end{array}$$

Поскольку эти четыре степени 3 представляют веса наших гирь, все, что нам остается сделать, это «перевести» сложение в предыдущих выкладках в действие прибавления гирь на левую чашку весов, а вычитание в действие прибавления гирь на правую чашку весов (вместе с сахаром). Следующая таблица дает указания, как это можно сделать. Читатель может пожелать дополнить ее самостоятельно.

ТАБЛИЦА 1–3: ГОЛОВОЛОМКА О ГИРЯХ

Количество взвешиваемого сахара	Вес, который надо поместить на левую чашку	Вес, помещаемый на правую чашку вместе с сахаром
1	$3^0 (= 1)$	Нет
2	$3^1 (= 3)$	$3^0 (= 1)$
3	$3^1 (= 3)$	Нет
4	$3^1 + 3^0 (= 3 + 1)$	Нет
5	$3^2 (= 9)$	$3^1 + 3^0 (= 4)$
...
40	$3^3 + 3^2 + 3^1 + 3^0$ (= 27 + 9 + 3 + 1)	Нет

Заключительные замечания

Загадка Сфинкса представляет собой первый в истории пример настоящей головоломки. Миф, из которого она произошла, переключи-

кается с историями, сочиняемыми для детей в наши дни. Герои таких историй обычно сталкиваются с испытаниями, предназначенными для проверки не только их физической выносливости, но также их умственных способностей отгадывать загадки. Такое поведение традиционно предполагает, что мы понимаем загадки как «миниатюрные прорывы» в истину. Что такое, в конце концов, философия и наука, как не попытки разгадать загадки, которые ставит жизнь?

Математические исследования также, по-видимому, направляются врожденной потребностью моделировать идеи повышенной сложности в форме головоломок. Возможно, именно поэтому некоторые величайшие в истории математики вопросы были первоначально сформулированы в виде головоломок. Их разрешение в большой мере потребовало мышления через озарение. Во многих случаях на вызревание такого озарения потребовались века, а то и тысячелетия. Но в конечном счете оно приходило, приводя к существенному прогрессу в математике. Может показаться, что для того, чтобы войти в «Фивы» математических знаний, мы должны сначала разгадать бросающие нам вызов загадки, не столь уж отличающиеся от загадки Сфинкса.

Упражнения

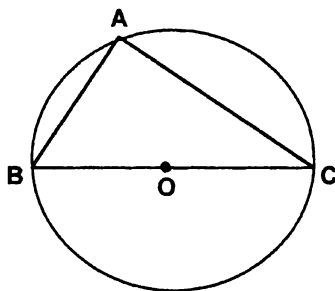
Загадки

1. Что можно выбросить, если поймал, но придется носить с собой, если не сможешь поймать?
2. Какое существо не похоже на свою мать и не имеет сходства с отцом, является помесью и не способно иметь потомства?
3. Я отпугиваю врагов моего хозяина оружием, которое ношу в челюстях, но убегаю от шлепка маленького ребенка.
4. Оно красное, синее, фиолетовое и зеленое. Каждый может с легкостью увидеть это, но никто не может его коснуться или даже приблизиться к нему. Что это?
5. До рождения у меня было имя, но оно изменилось в момент моего появления на свет. А когда меня не станет, меня будут называть именем моего отца. Так я меняю имена три дня подряд, хотя живу лишь день. Кто или что я?

6. Чем из того, что принадлежит вам, другие пользуются больше чем вы?
7. Придумайте загадки на следующие слова:
- А. правосудие
 - В. дружба
 - С. любовь
 - Д. время

Дедуктивные рассуждения

8. Треугольник ABC вписан в полукруг с основанием BC , опирающемся на диаметр. Докажите, что $\angle BAC$ равен 90 градусов. Символ \angle означает «угол».



Возможно, вам захочется для проведения доказательства использовать следующие факты:

- Сумма трех углов треугольника составляет 180 градусов.
- Диаметр есть отрезок прямой, составленный из двух радиусов.
- Все радиусы круга равны между собой.
- Равнобедренный треугольник имеет две одинаковые стороны.
- В равнобедренном треугольнике углы, противоположные равным сторонам, равны.

Индуктивные рассуждения

9. Умножьте несколько чисел на 9. Сложите цифры, из которых состоит каждое произведение. Если результат сложения есть число, состоящее более чем из одной цифры, сложите эти цифры. Продолжите эту операцию до получения числа из одной цифры. Примеры:

$$9 \times 50 = 450$$

Складываем цифры произведения: $4 + 5 + 0 = 9$

$$9 \times 43 = 387$$

Складываем цифры произведения: $3 + 8 + 7 = 18$ (две цифры)

Складываем цифры суммы: $1 + 8 = 9$

$$9 \times 693 = 6237$$

Складываем цифры произведения: $6 + 2 + 3 + 7 = 18$ (две цифры)

Складываем цифры суммы: $1 + 8 = 9$

Усматриваете ли вы здесь закономерность? Если да, какова она?

10. Теперь, используя закономерность, обнаруженную в предыдущей задаче, определите, какое из следующих чисел делится на 9:

- A. 477
- B. 648
- C. 8765
- D. 738
- E. 9878

11. Рассмотрите квадраты чисел от 1 до 20:

$$1^2 = 1 \times 1 = 1$$

$$2^2 = 2 \times 2 = 4$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$4^2 = 4 \times 4 = 16$$

$$5^2 = 5 \times 5 = 25$$

$$\vdots$$

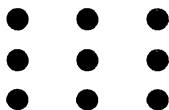
$$20^2 = 20 \times 20 = 400$$

Можете ли вы найти здесь закономерность? Если да, что вы можете сказать заранее о квадрате числа 22 и о квадрате числа 23?

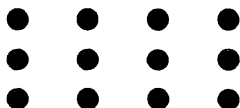
Мышление посредством озарения

12. Вспомним уже рассмотренную головоломку о девяти точках. В ее решении фигурировали четыре прямые линии. А можно ли решить

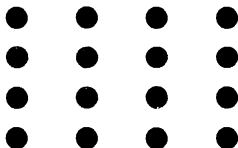
ее с помощью трех прямых линий? То есть можете ли вы соединить девять точек, не отрывая карандаша от бумаги и используя лишь три прямых.



13. В следующей версии этой головоломки имеется двенадцать точек. Соедините их, не отрывая карандаша от бумаги. Каково наименьшее число прямых линий, необходимых для этого?



14. Наконец, свяжите шестнадцать точек, не отрывая карандаша от бумаги. Каково наименьшее число прямых линий, необходимых для этого?





Волк, коза и капуста

В хаосе присутствует космос,
в беспорядке – тайный порядок.

КАРЛ ЮНГ (1875–1961)

Головоломки подобны наркотику. Просто спросите кого-нибудь из тех, кто ежедневно решает кроссворды или состоит в клубе любителей шахмат. Случаями болезненной страсти к решению головоломок и в самом деле полны анналы клинической психологии. В 1925 г. на Бродвее была поставлена пьеса под названием «Головоломки 1925», высмеивающая эту манию. Центральная сцена спектакля происходила в «Кроссвордном Санатории», где содержались люди, свихнувшиеся из-за своего пристрастия к решению кроссвордов.

Одним из первых в истории лиц, помешанных на головоломках, был ни кто иной, как Карл Великий (742–814), основатель Священной Римской Империи. Он настолько пристрастился к головоломкам, что нанял лучшего из их создателей, чтобы тот придумывал головоломки специально для него. Персоной, которую он избрал для этой работы, был знаменитый английский ученый монах, специалист по Экклезиасту, Алкуин. Пытаясь привить средневековой молодежи интерес к математике, изобретательный Алкуин включил в учебный трактат «Задачи для отта-

чивания ума юношей» 56 из множества придуманных им головоломок.

Одна головоломка из этого собрания, известная под названием «Волк, коза и капуста», считается одной из десяти величайших головоломок всех времен. Она не только включена практически во все классические собрания головоломок, но многие историки математики считают, что идея, лежащая в ее основе, является ключевым прорывом, который века спустя привел к становлению области математики, известной как **комбинаторика** и имеющей дело главным образом со структурой размещений. Эта область посвящена попыткам определить, как можно группировать объекты, пересчитывать их или организовывать каким-либо систематическим способом. Хотя примеры подобной идеи встречаются в традициях составления головоломок различных культур, версия Алкуина получила широкую известность у математиков. Замечательно, что простая головоломка Алкуина имела важные следствия для работ в области логики, а также для разработки и программного обеспечения компьютеров.

АЛКУИН (735–804)

Алкуин был знаменитым средневековым ученым, педагогом и писателем. Он обучался в центральном в его время учебном заведении Англии, монастырской школе в Йорке. В 782 г. Алкуин становится советником императора Карла Великого. В 796 г. Карл поставил его аббатом монастыря Св. Мартина во французском городе Туре. На этом посту Алкуин содействовал распространению англосаксонской культуры обучения по всей Европе, что принесло с собой оживление в сфере учености, известное как ренессанс Каролингов.

Антология головоломок Алкуина получила широкую известность в мире Средневековья, и многие из его головоломок в той или иной версии попадают и в современные собрания. Все они требуют для своего решения недюжинной изобретательности.

Головоломка

В общепринятом изложении головоломка «Волк, коза и капуста» выглядит так:

Крестьянину нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что в ней может поместиться только крестьянин, а с ним или один волк, или одна коза, или одна капуста. Но если оставить волка с козой, то волк съест козу, а если оставить козу с капустой, то коза съест капусту. Как, используя минимальное число поездок, перевез свой груз крестьянин?

Крестьянин начинает с того, что перевозит на другой берег козу, оставив на месте волка с капустой. Затем он возвращается один и забирает волка, оставив капусту в одиночестве на этом берегу реки. На том берегу он высаживает волка и возвращается назад с козой. Здесь он оставляет козу и перевозит на тот берег капусту. Возвращается один, оставив капусту на том берегу в компании волка и, следовательно, в безопасности. Забирает козу и перевозит ее через реку. Прибыв на тот берег он получает своих волка, козу и капусту в полной сохранности и может продолжать путь. Вся процедура потребовала пересечь реку семь раз.

Приведем пошаговую схему решения. «Исходное состояние» на обоих берегах реки до того, как крестьянин начинает свои лодочные перевозки туда и обратно, можно изобразить в следующем ниже виде (W — волк, G — коза, C — капуста, F — крестьянин). Ему можно приписать порядковый номер 0, поскольку никаких перевозок не происходит:

	На этом берегу	В лодке	На том берегу
0.	<u>W</u> <u>G</u> <u>C</u> <u>F</u>	— —	— — — —

Крестьянин начинает с того, что перевозит на тот берег в лодке козу, оставляя на этом берегу волка наедине с капустой в полной для нее безопасности. Это образует первый шаг решения:

	На этом берегу	В лодке	На том берегу
0.	<u>W</u> <u>G</u> <u>C</u> <u>F</u>	— —	— — — —
1.	<u>W</u> _ <u>C</u> _	<u>F</u> <u>G</u> →	— — — —

Крестьянин оставляет козу на том берегу и возвращается обратно один. Это завершает первый круг путешествия и добавляет к решению второй шаг:

	На этом берегу	В лодке	На том берегу
0.	<u>W</u> <u>G</u> <u>C</u> <u>F</u>	--	----
1.	<u>W</u> _ <u>C</u> _	<u>F</u> <u>G</u> →	----
2.	<u>W</u> _ <u>C</u> _	← <u>F</u> _	_ <u>G</u> _

С этого берега крестьянин забирает волка и перевозит его, оставляя в одиночестве капусту. Это третий шаг:

	На этом берегу	В лодке	На том берегу
0.	<u>W</u> <u>G</u> <u>C</u> <u>F</u>	--	----
1.	<u>W</u> _ <u>C</u> _	<u>F</u> <u>G</u> →	----
2.	<u>W</u> _ <u>C</u> _	← <u>F</u> _	_ <u>G</u> _
3.	_ _ <u>C</u> _	<u>F</u> <u>W</u> →	_ <u>G</u> _

Оказавшись на другом берегу, крестьянин не может оставить волка наедине с козой, так как тот ее съест. Поэтому он забирает козу в очередной рейс через реку, оставляя волка одного. Это составляет четвертый шаг:

	На этом берегу	В лодке	На том берегу
0.	<u>W</u> <u>G</u> <u>C</u> <u>F</u>	--	----
1.	<u>W</u> _ <u>C</u> _	<u>F</u> <u>G</u> →	----
2.	<u>W</u> _ <u>C</u> _	← <u>F</u> _	_ <u>G</u> _
3.	_ _ <u>C</u> _	<u>F</u> <u>W</u> →	_ <u>G</u> _
4.	_ _ <u>C</u> _	← <u>F</u> <u>G</u>	<u>W</u> _ _

Вернувшись на этот берег, крестьянин оставляет здесь козу и забирает с собой капусту, чтобы отвезти ее волку. Таким образом, он лишает козу возможности остаться наедине с капустой. Это пятый шаг:

	На этом берегу	В лодке	На том берегу
0.	<u>W</u> <u>G</u> <u>C</u> <u>F</u>	--	----
1.	<u>W</u> _ <u>C</u> _	<u>F</u> <u>G</u> →	----
2.	<u>W</u> _ <u>C</u> _	← <u>F</u> _	_ <u>G</u> _
3.	_ _ <u>C</u> _	<u>F</u> <u>W</u> →	_ <u>G</u> _

- | | | | |
|----|------------------------------|---------------------|------------------------------|
| 4. | <u> </u> <u>C</u> <u> </u> | ← <u>F</u> <u>G</u> | <u>W</u> <u> </u> <u> </u> |
| 5. | <u> </u> <u>G</u> <u> </u> | <u>F</u> <u>C</u> → | <u>W</u> <u> </u> <u> </u> |

Затем крестьянин возвращается один, оставив капусту на том берегу вместе с волком в полной безопасности. Это шестой шаг.

	На этом берегу	В лодке	На том берегу
0.	<u>W</u> <u>G</u> <u>C</u> <u>F</u>	<u> </u> <u> </u>	<u> </u> <u> </u> <u> </u> <u> </u>
1.	<u>W</u> <u> </u> <u>C</u> <u> </u>	<u>F</u> <u>G</u> →	<u> </u> <u> </u> <u> </u> <u> </u>
2.	<u>W</u> <u> </u> <u>C</u> <u> </u>	← <u>F</u> <u> </u>	<u> </u> <u>G</u> <u> </u> <u> </u>
3.	<u> </u> <u>C</u> <u> </u>	<u>F</u> <u>W</u> →	<u> </u> <u>G</u> <u> </u> <u> </u>
4.	<u> </u> <u>C</u> <u> </u>	← <u>F</u> <u>G</u>	<u>W</u> <u> </u> <u> </u> <u> </u>
5.	<u> </u> <u>G</u> <u> </u>	<u>F</u> <u>C</u> →	<u>W</u> <u> </u> <u> </u> <u> </u>
6.	<u> </u> <u>G</u> <u> </u>	← <u>F</u> <u> </u>	<u>W</u> <u> </u> <u>C</u> <u> </u>

В последнее путешествие на другой берег реки крестьянин берет с собой в лодку козу. Это седьмой шаг схемы:

	На этом берегу	В лодке	На том берегу
0.	<u>W</u> <u>G</u> <u>C</u> <u>F</u>	<u> </u> <u> </u>	<u> </u> <u> </u> <u> </u> <u> </u>
1.	<u>W</u> <u> </u> <u>C</u> <u> </u>	<u>F</u> <u>G</u> →	<u> </u> <u> </u> <u> </u> <u> </u>
2.	<u>W</u> <u> </u> <u>C</u> <u> </u>	← <u>F</u> <u> </u>	<u> </u> <u>G</u> <u> </u> <u> </u>
3.	<u> </u> <u>C</u> <u> </u>	<u>F</u> <u>W</u> →	<u> </u> <u>G</u> <u> </u> <u> </u>
4.	<u> </u> <u>C</u> <u> </u>	← <u>F</u> <u>G</u>	<u>W</u> <u> </u> <u> </u> <u> </u>
5.	<u> </u> <u>G</u> <u> </u>	<u>F</u> <u>C</u> →	<u>W</u> <u> </u> <u> </u> <u> </u>
6.	<u> </u> <u>G</u> <u> </u>	← <u>F</u> <u> </u>	<u>W</u> <u> </u> <u>C</u> <u> </u>
7.	<u> </u> <u> </u> <u> </u> <u> </u>	<u>F</u> <u>G</u> →	<u>W</u> <u> </u> <u>C</u> <u> </u>

После того как крестьянин добрался до другого берега, он может благополучно продолжить путь вместе с волком, козой и капустой. Это «конечное состояние» схемы. Поскольку оно не содержит никакой перевозки, его, как и исходное состояние, можно обозначить цифрой 0. Полная схема решения выглядит теперь так:

	На этом берегу	В лодке	На том берегу
0.	<u>W G C F</u>	--	----
1.	<u>W</u> _ <u>C</u> _	<u>F G</u> →	----
2.	<u>W</u> _ <u>C</u> _	← <u>F</u> _	_ <u>G</u> _
3.	_ _ <u>C</u> _	<u>F W</u> →	_ <u>G</u> _
4.	_ _ <u>C</u> _	← <u>F G</u>	<u>W</u> _ _ _
5.	_ <u>G</u> _ _	<u>F C</u> →	<u>W</u> _ _ _
6.	_ <u>G</u> _ _	← <u>F</u> _	<u>W</u> _ <u>C</u> _
7.	----	<u>F G</u> →	<u>W</u> _ <u>C</u> _
0.	----	--	<u>W G C F</u>

Возможно также несколько иное решение из семи шагов. В этом случае крестьянин снова сначала перевозит козу. Разница между этим и предыдущим решениями заключена в третьем, четвертом и пятом шагах:

	На этом берегу	В лодке	На том берегу
0.	<u>W G C F</u>	--	----
1.	<u>W</u> _ <u>C</u> _	<u>F G</u> →	----
2.	<u>W</u> _ <u>C</u> _	← <u>F</u> _	_ <u>G</u> _
3.	<u>W</u> _ _ _	<u>F C</u> →	_ <u>G</u> _
4.	<u>W</u> _ _ _	← <u>F G</u>	_ _ <u>C</u> _
5.	_ <u>G</u> _ _	<u>F W</u> →	_ _ <u>C</u> _
6.	_ <u>G</u> _ _	← <u>F</u> _	<u>W</u> _ <u>C</u> _
7.	----	<u>F G</u> →	<u>W</u> _ <u>C</u> _
0.	----	--	<u>W G C F</u>

Читатель, предпочитающий действительно осуществить каким-либо реальным способом предлагаемые перевозки, может воспользоваться, скажем, спичечным коробком в качестве лодки и четыре-мя кусочками бумаги, представляющими волка, козу, капусту и крестьянина (W, G, C, F).

Интересный вариант этой головоломки придумал в XVI веке итальянский математик Никколо Тарталья. Он повествует о трех молодых дамах и об их ревнивых мужьях:

НИККОЛО ФОНТАНА ТАРТАЛЬЯ (1499–1557)

Тарталья родился в Венеции, где стал широко известен как ученый и математик. Наиболее значительным из его трудов был *Nova Scientia*, где он обсуждает движение небесных тел и траектории снарядов.

В 1541 г. Тарталья также стал первым, кто построил алгоритм (пошаговую процедуру) для решения кубических уравнений. Кубическими называются уравнения, в которых одна из переменных возводится в третью степень, например, $x^3 + 29x^2 = 145$. Однако это решение прославил его соперника, Джероламо Кардано (1501–1576), который, как утверждают некоторые историки, возможно, просто украл его у Тарталья.

Три прекрасных дамы со своими мужьями подошли к реке. Небольшая лодка, на которой им предстояло совершить переправу, вмещала лишь двоих. Чтобы избежать компрометирующих ситуаций, переправу следовало организовать так, чтобы ни одна дама не могла оказаться в отсутствие мужа с мужчиной, который ее мужем не является. Как это удалось бы устроить, если перевозчиками могли быть любой мужчина и любая дама?

Для этого потребуется пересечь реку девять раз. Как и в предыдущем случае, мы можем легко построить схему решения, обозначив буквой Н мужа, а буквой W жену, и используя подстрочные цифры, чтобы указать, кто на ком женат: H_1 и W_1 будут, таким образом, представлять одну пару из мужа и жены, H_2 и W_2 — вторую пару, и H_3 и W_3 — третью пару. Главной целью является не допустить, чтобы вместе могли оказаться (в лодке или на берегу) Н и W с разными подстрочными номерами при отсутствии Н с тем же номером, который имеет W. Так, например, нахождение пары H_1 и W_2 в лодке неприемлемо, поскольку они составили бы пару, в которой дама (W_2) оставалась бы наедине с мужчиной (H_1), который не является ее мужем, а условие головоломки это запрещает. Все другие пары в лодке являются допустимыми. Ниже без комментариев приводится одна из возможных схем решения, содержащая девять шагов. Существуют и другие. Читатель, при желании, снова может воспользоваться спичечным коробком в качестве лодки и шестью

кусочками бумаги в качестве людей, обозначив их символами H_1 , H_2 , H_3 , W_1 , W_2 и W_3 , и физически выполнить каждый шаг, указанный в схеме.

	На этом берегу	В лодке	На том берегу
0.	$H_1 \ W_1 \ H_2 \ W_2 \ H_3 \ W_3$	— — —	— — — — —
1.	— — $H_2 \ W_2 \ H_3 \ W_3$	$H_1 \ W_1 \rightarrow$	— — — — —
2.	— — $H_2 \ W_2 \ H_3 \ W_3$	\leftarrow — W_1	H_1 — — — — —
3.	— — H_2 — $H_3 \ W_3$	$W_1 \ W_2 \rightarrow$	H_1 — — — — —
4.	— — H_2 — $H_3 \ W_3$	\leftarrow — W_2	$H_1 \ W_1$ — — — — —
5.	— — — — $H_3 \ W_3$	$H_2 \ W_2 \rightarrow$	$H_1 \ W_1$ — — — — —
6.	— — — — $H_3 \ W_3$	\leftarrow — W_2	$H_1 \ W_1 \ H_2$ — — — —
7.	— — — — H_3 —	$W_2 \ W_3 \rightarrow$	$H_1 \ W_1 \ H_2$ — — — —
8.	— — — — H_3 —	\leftarrow — W_3	$H_1 \ W_1 \ H_2 \ W_2$ — — — —
9.	— — — — —	$H_3 \ W_3 \rightarrow$	$H_1 \ W_1 \ H_2 \ W_2$ — — — —
0.	— — — — —	— — —	$H_1 \ W_1 \ H_2 \ W_2 \ H_3 \ W_3$

Легко можно сконструировать и более сложные варианты головоломки «Волк, коза и капуста», включая в них большее число людей и животных. Однако не все они имеют решение. Например, известные составители головоломок Сэм Лойд (1841–1911) и Генри Э. Дьюдени (1847–1930) обнаружили, что в условиях, сформулированных в головоломке Тарталья, для случая четырех пар решение получить невозможно. В этом случае решение существует, только если посередине реки в качестве «перевалочной базы» имеется остров. Далее мы используем головоломку Лойда–Дьюдени в качестве упражнения.

Математические комментарии

Задачи, имеющие в своей основе определенные размещения предметов — животных, супружеских пар, букв алфавита, можно систематически изучать и строить для них точные модели. Это главный урок, который следует извлечь из головоломки Алкуина. Математическое моделирование является способом представления всех типов структур — числовых, геометрических, комбинаторных и так далее.

Головоломка Иосифа и головоломка Киркмана о школьницах

Существует очень много головоломок, касающихся размещений. Все они требуют для своего решения изрядной дозы мышления посредством озарения. Рассмотрим еще два знаменитых примера. Первый носит название «Головоломка Иосифа», в честь еврейского историка Иосифа Флавия, жившего в первом веке от Р.Х. Он, как полагают, спас себе жизнь тем, что нашел ее правильное решение. Вот вариант этой головоломки:

На корабле находятся пятнадцать тиранов (Т) и пятнадцать беззащитных граждан (С) — слишком много для этого корабля. Поэтому принято решение выкинуть тиранов за борт, чтобы не дать кораблю затонуть. Выкидывать людей за борт поручено мифическому чудовищу, которое не умеет отличать тиранов от простых граждан. Чудовище обучено выкидывать за борт каждого девятого из людей, посаженных в кружок. Как следует посадить в круг людей, находящихся на борту, чтобы работа была проделана в соответствии с принятым решением?

Чудовище начинает с символа «С», расположенного в верхней точке круга, который изображен далее. Девятым от начала пассажиром является «Т». Поэтому его отправляют за борт. Следующим девятым пассажиром опять является «Т». Его тоже выбрасывают за борт. И так далее. Изображенное здесь круговое размещение сидящих пассажиров гарантирует, таким образом, что всех тиранов побросают за борт, а все граждане будут оставаться в безопасности. Читатели могут убедиться в этом самостоятельно.

Варианты головоломки Иосифа можно встретить в различных культурах по всему миру. Эту головоломку изучали знаменитые математики, включая Леонарда Эйлера (с которым мы встретимся в главе 4), потому что под видом головоломки она образует миниатюрную модель для исследования более сложных задач из области систематических размещений — области, которая теперь носит название: **системный анализ**.

Вторая головоломка называется головоломкой Киркмана о школьницах, по имени известного любителя-математика Томаса

Комбинаторика

Целью комбинаторики, по сути, является получение ответа на следующий вопрос: какие упорядоченные размещения множества объектов возможны при данных условиях? Чтобы получить представление о том, что это влечет за собой, вернемся к головоломке Алкуина, слегка изменив ее условия. На этот раз крестьянин находит лодку, в которой есть целых четыре сиденья: одно для него самого, а три других расположены в один ряд, и на них можно разместить волка, козу и капусту. Вопрос таков:

Сколько возможных способов есть у крестьянина для размещения в лодке волка, козы и капусты?

Давайте пометим три сиденья цифрами 1, 2 и 3. Рассмотрим первое сиденье. Крестьянин может поместить на него любой из трех объектов (W — волк, G — коза, C — капуста):

Сиденье 1	Сиденье 2	Сиденье 3
↓	↓	↓
<u>W</u>	—	—
<u>G</u>	—	—
<u>C</u>	—	—

При каждом из указанных размещений на сиденье 1 крестьянин может поместить на сиденье 2 любой из двух оставшихся объектов. Например, при W на сиденье 1 он может поместить на сиденье 2 G или C, при G на сиденье 1 он может поместить на сиденье 2 W или C и, наконец, при C на сиденье 1 он может поместить на сиденье 2 W или G. Ниже изображены возможные варианты, которые имеет крестьянин для размещения волка, козы и капусты на двух сиденьях.

Сиденье 1		Сиденье 2		Результат	Сиденье 3
↓		↓		↓	↓
<u>W</u>	и	<u>G</u>	→	<u>W G</u>	—
<u>W</u>	и	<u>C</u>	→	<u>W C</u>	—
<u>G</u>	и	<u>W</u>	→	<u>G W</u>	—
<u>G</u>	и	<u>C</u>	→	<u>G C</u>	—
<u>C</u>	и	<u>W</u>	→	<u>C W</u>	—
<u>C</u>	и	<u>G</u>	→	<u>C G</u>	—

Заметим, что полное число потенциальных пар (показанных в столбце «Результат») – WG, WC, GW, GC, CW, CG – равно $3 \times 2 = 6$. Это выражает в арифметической форме тот факт, что для каждого из трех объектов, которые крестьянин помещает на сиденье 1, он может выбрать один из двух объектов, чтобы заполнить сиденье 2, что дает в целом 6 пар.

Теперь для каждой из шести пар у крестьянина остается лишь одна возможность для заполнения сиденья 3. Например, для пары WG на сиденьях 1 и 2 соответственно крестьянину остается лишь C для сиденья 3, для пары WC на сиденьях 1 и 2 соответственно ему остается лишь G для сиденья 3, и так далее. Ниже изображены возможные варианты, которые имеет крестьянин для размещения в лодке волка, козы и капусты:

Сиденье 1		Сиденье 2		Результат		Сиденье 3		Итоговый результат
↓		↓		↓				↓
<u>W</u>	и	<u>G</u>	→	<u>W G</u>	и	<u>C</u>	→	<u>W G C</u>
<u>W</u>	и	<u>C</u>	→	<u>W C</u>	и	<u>G</u>	→	<u>W C G</u>
<u>G</u>	и	<u>W</u>	→	<u>G W</u>	и	<u>C</u>	→	<u>G W C</u>
<u>G</u>	и	<u>C</u>	→	<u>G C</u>	и	<u>W</u>	→	<u>G C W</u>
<u>C</u>	и	<u>W</u>	→	<u>C W</u>	и	<u>G</u>	→	<u>C W G</u>
<u>C</u>	и	<u>G</u>	→	<u>C G</u>	и	<u>W</u>	→	<u>C G W</u>

Снова заметим, что полное число потенциальных сочетаний (показанных в столбце «Итоговый результат») – WGC, WCG, GWC, GCW, CWG, CGW – равно $3 \times 2 = 6$. Как и прежде, это выражает в арифметической форме тот факт, что для каждого из трех объектов, которые крестьянин помещает на сиденье 1, он может выбрать один из двух объектов, чтобы заполнить сиденье 2, и один из одного для сиденья 3, что дает в целом 6 размещений из троек. Как читатель, возможно, помнит из школьного курса математики, такие размещения называются подстановками. **Подстановками** называется размещение элементов в группе с учетом их порядка. Например, результатами подстановок из двух букв А и В будут АВ и ВА. Эти пары состоят из одних и тех же элементов, но размещенных в разном порядке.

Давайте теперь включим и самого крестьянина (F) в планирование размещений:

Сколько возможных способов есть у крестьянина для размещения в лодке самого себя, волка, козы и капусты?

В этом случае имеется $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ возможных размещения. Первая цифра 4 относится к тому факту, что на сиденье 1 можно поместить любой из четырех объектов — волка (W), козу (G), капусту (C) или крестьянина (F). Вторая цифра 3 говорит нам о том, что для каждой из четырех возможностей для сиденья 1 имеются три возможности заполнить сиденье 2. Это дает $4 \times 3 = 12$ размещений для первых двух сидений. Третья цифра говорит нам, что для каждого из двенадцати размещений имеется два способа занять сиденье 3, что в целом дает $4 \times 3 \times 2 = 24$ размещения. И, наконец, четвертая цифра указывает, что для каждого из двадцати четырех предыдущих размещений есть только один способ занять сиденье 4, что в целом дает $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ подстановки. Эти подстановки (организованные для большей ясности в группы, соответствующие с объектом, занимающим первое сиденье) имеют следующий вид:

На сиденьи 1 находится W:

WGCF
WGFC
WCGF
WCFG
WFGC
WFCG

На сиденьи 1 находится G:

GWCF
GWFC
GCFW
GCWF
GFWC
GFCW

На сиденьи 1 находится C:

CWGF
CWFG
CGWF
CGFW
CFWG
CFGW

На сиденьи 1 находится F:

FWGC

FWCG

FGWC

FGCW

FCWG

FCGW

Если бы в лодке было пять мест для сидения и имелось бы пять объектов для их заполнения, то существовало бы $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ возможных размещений или подстановок этих объектов (как читатель может проверить самостоятельно); если бы было шесть мест и шесть объектов, то существовало бы $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ подстановок, и так далее. Вы улавливаете правило? Если имеется n мест, которые могут быть заняты, и n объектов для их заполнения, то существует $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$ подстановок. Такое произведение называют термином **факториал** и обозначают символом $n!$:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$$

Эта формула обобщает тот факт, что на первое место можно поместить один из n объектов, на второе один из полного числа объектов, уменьшенного на единицу, $(n - 1)$, на третье один из полного числа объектов, уменьшенного на два, $(n - 2)$, и так далее вплоть до единственной оставшейся возможности для заполнения последнего места. Вот несколько примеров, иллюстрирующих понятие факториала:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

...

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$$

Давайте исследуем понятие подстановки немного глубже. Предположим, что некоторые из размещаемых объектов неразличимы. Вот пример задачи такого рода:

Сколько пятизначных чисел можно построить, используя цифры 1, 1, 2, 3 и 4?

Тут мы располагаем пятью объектами (цифрами), два из которых неразличимы — две единицы. Это значит, что некоторые из размещений окажутся в точности одинаковыми. Поэтому их необходимо, так сказать, «отфильтровать». Чтобы сделать это, давайте припишем индексы двум единицам для того, чтобы иметь возможность следить за ними. Тогда можно переписать эти цифры следующим образом:

$$1_1, 1_2, 2, 3 \text{ и } 4.$$

Можно построить всего 120 пятизначных чисел:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Однако если убрать индексы, некоторые из этих чисел будут неразличимыми, как показывают примеры 1 и 2:

$$1. 1_1 2 1_2 3 4 = 12\ 134$$

$$2. 1_2 2 1_1 3 4 = 12\ 134$$

Сколько же таких случаев имеется среди 120 чисел? Их число равно $2!$. Почему? Потому что это как раз число подстановок для двух цифр 1_1 и 1_2 , если рассматривать их вне зависимости от их появления в числах одновременно с другими цифрами. Терпеливые читатели могут при желании проверить это самостоятельно, построив 120 подстановок с индексированными цифрами, а затем удалив подстановки, дублирующие другие после удаления индексов.

Удаление дублирующих подстановок на самом деле, конечно, представляет собой деление $5!$ на $2!$:

$$\frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times (2 \times 1)}{(2 \times 1)} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

Таким образом, мы можем образовать шестьдесят различных пятизначных чисел. Вообще число различных подстановок из n объектов, среди которых r являются неразличимыми, равно

$$\frac{n!}{r!} \quad (r - \text{число неразличимых объектов}).$$

Рассмотрим теперь ситуацию, в которой людей больше, чем мест, на которых их можно разместить:

Предположим, что нам необходимо избрать одного президента, одного вице-президента и одного секретаря из десяти членов комиссии. Сколькими способами можно заполнить эти три вакансии?

Разумеется, есть десять возможностей для выбора кандидатуры на пост президента, для каждой из этих возможностей остается девять возможностей для выбора кандидатуры на пост вице-президента; а для каждой из выбранных таким образом пар мы имеем возможность выбирать из восьми человек кандидатуру на пост секретаря. Итак, для этого случая число подстановок равно $10 \times 9 \times 8 = 720$.

Можно ли обобщить это решение? Заметим, что ответ $10 \times 9 \times 8$ на самом деле является выражением $10!$, у которого удалены последние семь множителей:

$$10 \times 9 \times 8 \times (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1).$$

Этот результат возникает при делении $10!$ на $7!$ ($= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$), как показано ниже:

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} = 10 \times 9 \times 8 = 720.$$

Заметим, что знаменатель $7!$ в предыдущей дроби можно удобно переписать в виде $(10 - 3)!$, и что 3 в скобках означает число позиций, которые необходимо заполнить. Находка, которая привела к этому переписыванию, подсказывает и другую подходящую к данному случаю догадку: вообще, если в числителе $n!$, то в знаменателе должно быть $(n - r)!$, где r — число позиций, которые необходимо заполнить:

$$\frac{n!}{(n - r)!}$$

Эта формула позволяет теперь легко решить любую задачу, в которой требуется заполнить r позиций выборками из n объектов. Выражаясь другим способом, можно сказать, что эта формула дает нам число размещений из n объектов по r .

Прежде чем покинуть область элементарной комбинаторики, давайте рассмотрим еще один вид схемы размещений. Предположим, что мы должны выбрать в подкомитет трех человек из десяти кандидатов. По-прежнему ли существует 720 способов это сделать? Ответ будет отрицательным, поскольку в этом случае порядок среди членов подкомитета значения не имеет. Для примера давайте будем считать, что трех избранных членов подкомитета зовут Крис, Люси и Рэйчел. Для этих трех отдельных людей имеется $3!$ способа ($3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$) занять три места в подкомитете:

Президент	Вицепрезидент	Секретарь
↓	↓	↓
Крис	Люси	Рэйчел
Крис	Рэйчел	Люси
Люси	Крис	Рэйчел
Люси	Рэйчел	Крис
Рэйчел	Крис	Люси
Рэйчел	Люси	Крис

Однако при создании подкомитета порядок выбора значения не имеет. Необходимо лишь выбрать трех человек. Например, не важно, будет ли их порядок (1) Крис, Люси, Рэйчел или (2) или Рэйчел, Люси, Крис. Предыдущие шесть подстановок могут быть сведены, таким образом, просто к выбору трех определенных людей. Вот почему этот тип размещений называется сочетаниями, а не подстановками. **Сочетание** можно определить как размещение, в котором не учитывается порядок объектов. В случае подкомитета из трех членов необходимо удалить из числа 720, числа всех возможных выборов, избыточные подстановки. Сколько же именно? Чтобы

ИТОГОВАЯ СВОДКА ФОРМУЛ

Число подстановок из n объектов:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$$

Число подстановок из n объектов, среди которых r неразличимы: $n!/r!$

Число размещений из n объектов по r : $n!/(n - r)!$

Число сочетаний из n объектов по r : $n!/(n - r)!r!$

осуществить это, мы просто удалим из этих 720 подстановок лишние путем деления

$$\frac{720}{3!} = \frac{720}{6} = 120.$$

Заметим, что знаменателем в данном случае является снова $r!$ — факториал числа заполняемых мест. Заметим также, что 720 в числителе было получено с помощью предыдущей формулы, а именно, $n!/(n-r)!$. Итак, общей формулой для числа сочетаний будет предшествующая формула, деленная на $r!$:

$$\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

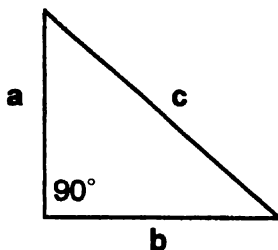
Заключительные замечания

Головоломка «Волк, коза и капуста», головоломка Иосифа и головоломка Киркмана о школьницах являются образчиками схем, используемых в комбинаторике. Простыми, но элегантными способами они иллюстрируют характер математических исследований в этой области. Как метко выразился великий немецкий математик Готфрид Лейбниц (1646–1716), математика есть «комбинаторное искусство».

ПИФАГОР (около 582–500 до Р.Х.)

Пифагор более всего известен благодаря открытию теоремы, названной его именем. Около 529 г. до Р.Х. он поселился в Кротоне (Италия). Здесь он основал тайное общество, состоящее из аристократов. Членов «внутреннего круга» общества он называл *mathematikoi*, что значит «те, кто упражняется в науке». Во время политических волнений горожане, с подозрением относившиеся к обществу, убили большую часть его членов. Историки не знают, удалось ли Пифагору покинуть город до взрыва насилия или его тоже постигла гибель. Общество пифагорейцев просуществовало еще некоторое время после резни, окончательно исчезнув из истории где-то в 400-е годы до Р.Х.

Греческий философ Пифагор основал математику по существу как науку о схемах. Величайшим его открытием была теорема, носящая его имя* (**теорема Пифагора**). Эта теорема утверждает, что квадрат **гипотенузы** (стороны треугольника, лежащей против прямого угла) **прямоугольного треугольника** (треугольника, один из углов которого равен 90°) равен сумме квадратов двух его других сторон. На рисунке, приведенном ниже, гипотенузой является сторона, лежащая напротив прямого угла. Мы узнаем больше об этой теореме в главе 5.



Пифагорианцы твердо верили, что математические теоремы (такие, как та, которую доказали они сами) несут в себе тайны Вселенной. Они утверждали, что космос говорит на языке цифр. По этой причине задача математики это, безусловно, одна из важнейших задач, стоящих перед человечеством, — расшифровать грамматику этого языка.

Упражнения

Переправы, размещения, составления пар

15. Начнем с простого варианта головоломки Тарталья, чтобы, так сказать, прогреть мотор нашего ума, повернув ее немного по-другому. Сколько переправ потребуется для перевозки всего двух пар, если (1) лодка, на которой им придется переправляться, вмещает лишь двух человек, (2) для избежания компрометирующих ситуаций переправа должна быть организована так, чтобы ни одна женщина не могла остаться с другим мужчиной в отсутствие ее мужа, и

*Нет никаких оснований полагать, что Пифагору было известно ее доказательство. (Примеч. пер.)

(3) двух женщин никогда нельзя оставлять одних (на любом берегу или в лодке).

16. Теперь определите, число полных пересечений реки, необходимых для того, чтобы переправить четыре супружеские пары, если лодка, на которой им придется переправляться, вмещает лишь двух человек, а переправа должна быть организована так, чтобы ни одна женщина не могла остаться с другим мужчиной в отсутствие ее мужа. Заметьте, что решение возможно, только если посередине реки в качестве «перевалочной базы» для людей имеется остров. Поездки, включающие посещение острова и возвращение с него обратно, не считаются «полными» пересечениями реки. В этом варианте две женщины могут оставаться наедине друг с другом в любом месте и в любое время.

17. Решите головоломку Киркмана: как следует выводить на прогулку пятнадцать школьников пятью шеренгами по трое в течение семи дней, чтобы ни одна школьница не попала в одну тройку с любой другой более одного раза?

18. В ящике имеется двадцать бильярдных шаров, десять белых и десять черных. Если вы завяжете себе глаза, то каким будет наименьшее число шаров, которые необходимо достать, чтобы гарантировано получить пару шаров одного цвета, то есть два белых шара или два черных шара?

19. А теперь, каким будет наименьшее число шаров, которые необходимо достать, чтобы гарантировано получить пару шаров одного цвета (глаза по-прежнему завязаны), если ящик содержит:

А. десять белых, десять черных и десять зеленых шаров;

В. десять белых, десять черных, десять зеленых и десять желтых шаров;

С. десять белых, десять черных, десять зеленых, десять желтых и десять красных шаров?

Можете ли вы определить правило для решения? Если да, то каково оно?

20. Приложимо ли то же правило к другим соотношениям чисел шаров: например, десять белых, восемь черных и четыре зеленых?

21. Если в ящике перемешаны шесть пар белых перчаток и шесть пар черных перчаток, каким будет наименьшее число перчаток, которые необходимо достать (глаза по-прежнему завязаны), чтобы гарантировано получить пару перчаток одного цвета, белых или черных?

22. Возможно, наиболее остроумной головоломкой этого жанра является головоломка, изобретенная Льюисом Кэрролом (1832–1898), великим создателем головоломок и автором классических «детских» книг «Алиса в Стране Чудес» (1865) и «Алиса в Зеркалье» (1872). В сумке находится один жетон, либо белый либо черный. В нее добавляют белый жетон, встряхивают ее и достают из нее один жетон, который оказывается белым. Каковы шансы достать белый жетон?

Комбинаторика

23. Если имеется три различных дороги от дома Сары к дому Билла и четыре различных дороги от дома Билла к дому Ширли, то сколько существует путей, проходящих через дом Билла от дома Сары к дому Ширли?

24. Двадцать членов клуба выбирают президента и вице-президента. Сколько существует возможных результатов выбора? А если только два кандидата, по имени Бренда и Хизер, могут баллотироваться в президенты?

25. Алекс хочет приготовить суп ровно из пяти видов овощей. Если он может выбирать из двенадцати видов овощей, то сколько различных супов может он приготовить?



Кролики Фибоначчи

Чем больше мы узнаем, тем фантастичнее
становится мир и тем глубже окружающая
его тьма.

ОЛДОС ХАКСЛИ (1894–1963)

Сегодня средневековый период Европы часто называют «темными веками», хотя оказывается, что в отношении науки этот период был просвещен гораздо более, чем принято думать. В самом деле средневековые ученые сделали значительные открытия в физике, химии и астрономии, несмотря на то, что правящая в эту эпоху церковная олигархия оказывала серьезное противодействие их усилиям.

Но для одной области средневековой науки название «темные века», по-видимому, вполне подходит. До начала XIII века прогресс, достигнутый в математике, был ничтожным. Не из-за противодействия религиозных властей и, уж конечно, не из-за недостатка изобретательности, а потому, что прогрессу препятствовала неуклюжая и неэффективная **римская система** обозначения чисел, основанная на семи буквах алфавита, которым приписывались числовые значения:

I = один

V = пять

X = десять
 L = пятьдесят
 C = сто
 D = пятьсот
 M = тысяча.

Чтобы почувствовать, какой неповоротливой была эта система, посмотрим, как в ней записывалось число «две тысячи двести пятьдесят три»:

MMCCCLIII = две тысячи двести пятьдесят три.

Теперь сравним римское число с тем, которое мы используем сегодня:

2253 = две тысячи двести пятьдесят три.

Наше число гораздо легче прочесть, поскольку принципы, используемые для его построения, просты — число, выражающее номер места каждой цифры справа налево, указывает, на какую степень десяти ее следует умножить. Вот почему наша система исчисления носит название десятичной. Заметив, что «одна тысяча» может быть представлена как 10^3 (поскольку $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$), «сто» как 10^2 (поскольку $10^2 = 10 \times 10 = 100$), «десять» как 10^1 и «один» как 10^0 (см. выноски показателей степени в главе 1), легко увидеть, что десятичное число 2253 читается так:

2	2	5	3
↓	↓	↓	↓
две тысячи	двести	пятьдесят	три
2×10^3	2×10^2	5×10^1	3×10^0

Вообразите теперь, к чему приводила попытка произвести простое математическое действие, например, сложение чисел 2253 и 1337, с помощью римских цифр. Вот как это выглядело бы на бумаге:

MMCCCLIII + MCCCXXXVII = MMMDXC.

Эта задача является устрашающей, в чем читатель может убедиться самостоятельно. Она еще сильнее усложняется правилом,

АБАК

Абак – это древний прибор, который применялся в Китае и других странах для выполнения арифметических вычислений. Он представляет собой раму, содержащую ряды бусин, нанизанных на проволоки или узкие деревянные стержни, прикрепленные к раме.

В типичном китайском абаке ряды бусин разделены поперечной планкой. В каждом ряду две бусины находятся над планкой и две под ней. Первый ряд справа изображает колонку «единиц», второй – колонку «десяток», третий – колонку «сотен», и так далее.

гласящим, что если меньшее число написано перед большим, то его следует вычитать из большего. То есть число «девяносто» записывается как ХС («сто минус десять»).

Очевидно, что было бы чрезвычайно трудно произвести сложение, держа в уме перевод букв в числа, особенно по сравнению с теми минимальными усилиями, которые затрачиваются на выполнение сложения в десятичных числах:

$$\begin{array}{r} 2253 \\ +1337 \\ \hline 3590 \end{array}$$

Как уже было указано, превосходство десятичной системы над римской покоится на том факте, что она основана на «принципе абака», в котором позиция цифры указывает на означаемую ею величину, задавая степень, в которую надо возвести 10. Присутствие цифры 0 в этой системе дает возможность по-разному записывать такие числа как «одиннадцать» (= 11), «сто один» (= 101) и «тысяча один» (= 1001), не используя дополнительных обозначений. Цифра 0 в числе просто говорит нам, что соответствующее место «не занято» или «пусто», поскольку умножение любого числа на 0 всегда дает 0:

$$11 = \text{одиннадцать}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{десять} & \text{один} \\ 1 \times 10^1 & 1 \times 10^0 \end{array}$$

101 = сто один

1	0	1
↓	↓	↓
сто	не занято	один
1×10^2	0×10^1	1×10^0

1001 = тысяча один

1	0	0	1
↓	↓	↓	↓
тысяча	не занято	не занято	один
1×10^3	0×10^2	0×10^1	1×10^0

Неудивительно, что система счисления, которой сегодня пользуется весь мир, является десятичной. Первоначально она была создана в Индии в III веке до Р.Х. и попала в арабский мир около VII или VIII века новой эры. Впервые индо-арабская система достигла Европы в 1000 году благодаря усилиям Папы Сильвестра Второго. Но в это время на нее едва обратили внимание. Несколько веков спустя ее снова ввел в средневековой Европе гораздо более практичным способом итальянский купец Леонард из Пизы, сын Боначчи (Leonardo da Pisa, Figlio di Bonacci)), более широко известный как Леонардо Фибоначчи.

Опубликовав в 1202 г. свое руководство, весьма уместно озаглавленное *Liber Abaci* («Книга абака»), Фибоначчи успешно убедил соотечественников в том, что десятичная система гораздо лучше римской. Он проделал это главным образом путем сочинения головоломок и практических задач, которые легко можно было решить с ее помощью. Вскоре после этой публикации математика буквально «взлетела», стала наукой, расцветающей по всей Европе, и, несомненно, приведшей в движение взрыв интереса к знаниям, известный как Ренессанс, начавшийся в Италии в 1300-е годы.

Головоломка о кроликах появилась как раз в *Liber Abaci*. Подобно головоломке Алкуина «Волк, коза и капуста» она высвечивает тот факт, что математика есть по существу наука о схемах. Решение этой головоломки дает последовательность чисел, содержащую так много скрытых схем, что до сего дня люди продолжают на них охотиться. А если вам этого мало, то вдобавок было обнаружено, что «последовательность Фибоначчи», как ее теперь

ЛЕОНАРДО ФИБОНАЧЧИ (прибл. 1170–1240)

Родившись в Пизе, Фибоначчи совершал путешествия по всей Византийской империи. Во время этих путешествий он узнал о десятичной системе, которой пользовался арабский мир. По возвращении в Пизу, чтобы продемонстрировать практичность и эффективность этой системы счисления европейской аудитории, он опубликовал свой *Liber Abaci*.

Фибоначчи был так увлечен арабской культурой, что многое в своей книге написал справа налево, имитируя стиль арабского письма. Например, он записал числа в порядке убывания (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) и писал дроби перед целыми числами ($\frac{1}{2}4$ вместо $4\frac{1}{2}$).

называют, встречается как в природе, так и в человеческой деятельности! Очевидно, что если какая головоломка и заслуживает включения в первую десятку, то это, конечно, головоломка Фибоначчи о кроликах.

Головоломка

Головоломка, обнаруженная в третьем разделе *Liber Abaci*, выглядит так:

Некто поместил пару кроликов, самца и самку, в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной. Сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, самца и самку, а рожают кролики со второго месяца после своего рождения? Предполагается, что ни один кролик не умер в течение года.

Сначала в вольере имеется только одна пара кроликов, первоначальная. В конце первого месяца в вольере все еще остается одна пара, поскольку условие головоломки утверждает, что пара кроликов производит потомство только «со второго месяца после своего рождения». В течение второго месяца пара производит свое первое потомство — еще одну пару. Таким образом, в конце второго месяца общее число пар, находящихся в вольере, состоит из

первоначальной пары и пары, составляющей ее первое потомство. Подведем итог:

В начале

Пара помещается в вольер.

Давайте обозначим символом F_1 «пару кроликов Фибоначчи номер 1».

В конце первого месяца

Полное число пар в вольере: $F_1 = 1$ пара.

В конце второго месяца

F_1 производит первую пару потомства.

Обозначим новую пару символом F_2 .

Общее число пар в вольере $F_1 + F_2 = 2$ пары.

В течение третьего месяца только первая пара F_1 (теперь вполне способная к деторождению) дает жизнь еще одной паре. В соответствии с условием головоломки (пара может давать потомство со второго месяца своего существования) второй паре придется ждать еще месяц, прежде чем она тоже станет способной к деторождению. Поэтому в конце третьего месяца в вольере находятся всего три пары: первая пара и две пары потомков, которых произвела таким образом первая пара:

В конце третьего месяца

F_1 производит еще одну пару потомства.

Обозначим ее символом F_3 .

F_2 еще не производит потомства, поскольку находится в вольере только месяц.

Общее число пар в вольере $F_1 + F_2 + F_3 = 3$ пары.

Рассмотрим теперь, что происходит в течение четвертого месяца. Первая пара F_1 производит еще одну пару. Пара F_2 производит теперь свою первую пару, а F_3 еще не начинает деторождения. Поэтому в конце месяца в вольере появляются всего две новорожденные пары — одна от F_1 и одна от F_2 . Всего в конце месяца в вольере находятся три исходные пары плюс две новорожденные, давая в результате пять пар:

В конце четвертого месяца

F_1 производит еще одну пару потомства.

Обозначим ее символом F_4 .

F_2 производит свою первую пару.

Обозначим ее символом F_5 .

F_3 еще не производит потомства, поскольку находится в вольере только месяц.

Общее число пар в вольере $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 5$ пар.

В течение пятого месяца пара F_1 производит еще одну пару, как и F_2 (теперь вполне продуктивная). F_3 провела в вольере уже месяц, поэтому она теперь тоже продуктивна и рождает свою первую пару. Другие две пары кроликов, F_4 и F_5 пока не начинают деторождения. Поэтому в конце пятого месяца к пяти парам, уже обитающим в вольере, добавляются три новорожденных, давая общее число $5 + 3 = 8$ пар:

В конце пятого месяца

F_1 производит еще одну пару потомства.

Обозначим ее символом F_6 .

F_2 тоже производит еще одну пару.

Обозначим ее символом F_7 .

F_3 производит свою первую пару кроликов.

Обозначим ее символом F_8 .

F_4 и F_5 еще не производят потомства, поскольку находится в вольере только месяц (F_4 произошла от F_1 , а F_5 от F_2).

Общее число пар в вольере $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8 = 8$ пар.

Дальнейшие вычисления производятся аналогичным способом. Оставляем их терпеливому читателю в качестве упражнения. В конце периода из двенадцати месяцев в вольере будут находиться 233 пары. Помесячные суммы накапливаемых в вольере пар кроликов выглядят следующим образом:

За какой срок?	Сколько пар в вольере?
начало	1 пара
1 месяц	1 пара
2 месяца	2 пары
3 месяца	3 пары

За какой срок?	Сколько пар в вольере?
4 месяца	5 пар
5 месяцев	8 пар
6 месяцев	13 пар
7 месяцев	21 пара
8 месяцев	34 пары
9 месяцев	55 пар
10 месяцев	89 пар
11 месяцев	144 пары
12 месяцев	233 пары

Итак, ответом на головоломку Фибоначчи будет: за двенадцать месяцев в вольере появится 233 пары кроликов. Едва ли это решение интересно само по себе. Но ряд удивительных схем, которые в нем таятся, представляет огромный интерес. Первую схему легко можно увидеть, по очереди записав числа пар, находящихся в вольере на конец каждого месяца, в линейную последовательность:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233.

Каждое число в этой последовательности равно сумме двух предыдущих чисел — например, 2 (третье число) = 1 + 1 (сумма двух предыдущих); 3 (четвертое число) = 1 + 2 (сумма двух предыдущих); и так далее. «Скрытая формула» этой последовательности позволяет продолжать ее бесконечно. Чтобы получить число, следующее за 233, все что требуется сделать, это сложить 233 и 144, получив 377; чтобы получить число, следующее за 377, сложим 377 и 233, что дает 610; и так далее, до бесконечности:

{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...}.

В математике последовательность, или **ряд**, заключается в скобки. Числа ряда называются его членами. Три точки указывают на то, что за написанными членами следует бесконечное число членов. Последовательность Фибоначчи представляет собой, таким образом, бесконечный ряд, что в **математической терминологии** означает упорядоченную последовательность чисел или других величин, продолжающуюся до бесконечности. Натуральные числа являются примером бесконечного ряда, поскольку среди них нет никакого последнего числа {1, 2, 3, 4, 5, ...}. Если мы обозначим общий член ряда

Фибоначчи как F_n (**число Фибоначчи**), то формула, порождающая каждый член этого ряда, может быть представлена в виде

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Это короткий способ указать на то, что любое число в последовательности Фибоначчи, F_n , может быть определено путем сложения предшествующего числа, F_{n-1} , и идущего перед ним, F_{n-2} . Чтобы помочь читателям, у которых возникают трудности с чтением таких символов, рассмотрим конкретный пример. Давайте выберем $n = 6$. Это обозначение «шестого» числа в приведенной выше последовательности Фибоначчи (при чтении слева направо). Это число равно 8. Итак, для этого случая:

$$F_n = F_6 = 8.$$

Следовательно, обозначение F_{n-1} (предыдущее число) относится к числу, идущему в последовательности под пятым номером. Как читатель сам может убедиться, это число 5:

$$F_{n-1} = F_{6-1} = F_5 = 5.$$

Обозначение F_{n-2} (число, идущее перед предыдущим) относится к числу, идущему в последовательности под четвертым номером

$$F_{n-2} = F_{6-2} = F_4 = 3.$$

В результате при $n = 6$ формула $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ переводится в выражение

$$\begin{aligned} F_6 &= F_5 + F_4 \\ 8 &= 5 + 3. \end{aligned}$$

В течение многих лет свойства чисел Фибоначчи подвергались усиленному изучению, что породило значительную по объему литературу. Основную схему, скрытую в этой последовательности, формально изучал в 1632 г. рожденный во Франции математик Алберт Жирар (1595?–1632?). В 1753 г. шотландский математик Роберт Симсон (1687–1768) заметил, что по мере роста номера числа в последовательности отношение предшествующего члена к после-

ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Простые числа

Целое число называется **простым числом**, если его множителями являются только 1 и оно само. Множитель – это меньшее число, на которое делится большее число. Большее число оказывается, таким образом, построенным из меньших чисел, которые будучи перемноженными и дают его. Простое число фактически есть такое число, которое нельзя разложить на множители. Примеры:

$$3 = 3 \times 1$$

$$5 = 5 \times 1$$

$$19 = 19 \times 1$$

Заметим, что число 1 не определяется как простое.

Составные числа

Целое число называется **составным числом**, если оно является произведением различных множителей. Отметим, что на низшем уровне сомножители в составном числе все являются простыми. Примеры:

$$4 = 2 \times 2$$

$$12 = 2 \times 6 = 2 \times (2 \times 3) = 2 \times 2 \times 3$$

$$20 = 2 \times 10 = 2 \times (2 \times 5) = 2 \times 2 \times 5$$

Простые числа, очевидно, являются «строительными блоками» нашей числовой системы.

дующему приближается к значению — 0,618 («золотое сечение»). Однако тем, кто обнаружил в числах Фибоначчи множество скрытых в них разных схем, был французский математик и создатель головоломок Эдуар Люка, с которым мы встретимся в главе 6. Он назвал **последовательностью Фибоначчи** ряд чисел, начинающийся с 1, в котором каждое последующее число является суммой двух предшествующих чисел. Люка создал также свою собственную версию последовательности Фибоначчи, известную как последовательность Люка. Она в точности подобна по построению последовательности Фибоначчи за тем исключением, что начинается с числа 2:

$$\{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123 \dots\}.$$

Обнаружено, например, что этот ряд дает ключи для понимания проблемы простых чисел. В 1962 г. Вернер Эмиль Хоггарт (1921–1981) и ученый монах Альфред Бруссау (1907–1988) основали Ассоциацию Фибоначчи с единственной целью – исследовать эту последовательность и скрытые в ней схемы, а их число, по-видимому, бесконечно. С 1963 года Ассоциация приступила к ежеквартальному изданию, названному *Fibonacci Quarterly*. Оно и теперь продолжает выходить в свет.

Математические комментарии

Число схем, которые можно найти в последовательности Фибоначчи, является умопомрачительным. Почему их так много в простой головоломке? Насколько мне известно, на этот вопрос не существует никакого ответа. Все, что можно сказать об этом, это то, что следствия, получаемые из последовательности, порожденной простой головоломкой, дают определенные основания верить, подобно пифагорейцам, что числа, в конце концов, могут составлять тайный язык Вселенной.

Схемы в последовательности Фибоначчи

Давайте взглянем на некоторые схемы, которые таятся в последовательности Фибоначчи. Если мы возьмем отношение предшествующего члена ряда

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots\}$$

к последующему, то оно будет приближаться к бесконечной десятичной дроби 0,6180339 Отношения соответствующих чисел в последовательности Фибоначчи таковы:

$$5/8 = 0,625$$

$$8/13 = 0,615384$$

$$13/21 = 0,619047$$

$$21/34 = 0,617647$$

$$\dots$$

$$610/987 = 0,6180344$$

и т. д.

ЗОЛОТОЕ ОТНОШЕНИЕ

Известное также как золотое сечение, золотое отношение является пропорцией, которая получается, если отрезок прямой разделить так, что отношение длины более длинного сегмента (**АС** на рисунке ниже) к длине всего отрезка (**АВ**) равно отношению длины более короткого сегмента (**СВ**) к длине более длинного сегмента (**АС**). Это отношение представляет собой бесконечную десятичную дробь 0,6180339...

$$AC/AB = CB/AC = 0,6180339...$$



Со времен античности философы, художники и математики были заинтригованы этим отношением, которое писатели Ренессанса называли «божественной пропорцией»! Очень часто считается, что форма, созданная с помощью этого отношения, особенно прекрасна. Обнаружено также, что оно часто встречается в природе.

Оказывается, что эти отношения стремятся к **золотому сечению** — отношению, обнаруженному древними греками, которое с тех пор считается стандартом эстетического суждения (см. выноску). Последовательность Фибоначчи содержит в себе так много подобных схем, что можно буквально потратить целую жизнь на их извлечение. Вот еще несколько:

► Последовательность, которая получается путем нахождения разности между двумя последовательными числами Фибоначчи (например, $3 - 2 = 1$, $8 - 5 = 3$, и т. д.), является исходной последовательностью:

{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...}

Разности между последовательными числами таковы:

$$2 - 1 = 1$$

$$3 - 2 = 1$$

$$5 - 3 = 2$$

$$8 - 5 = 3$$

$$\begin{array}{rcl}
 13 - 8 & = & 5 \\
 21 - 13 & = & 8 \\
 \dots & = & \dots \\
 & \uparrow &
 \end{array}$$

последовательность Фибоначчи (читается сверху вниз).

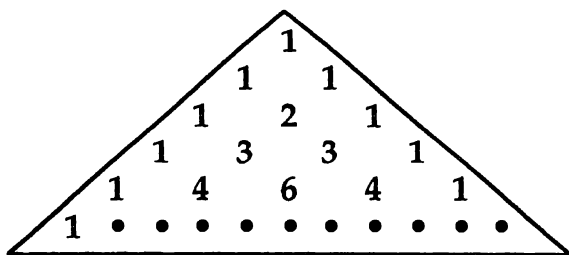
► Сумма квадратов двух последовательных чисел Фибоначчи является числом Фибоначчи. Заметим: если F_n является произвольным числом Фибоначчи, то F_{n+1} является числом, следующим за ним. Заметим также, что символы F_n^2 и F_{n+1}^2 представляют квадраты последовательных чисел F_n и F_{n+1} :

ТАБЛИЦА 3-1: ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ

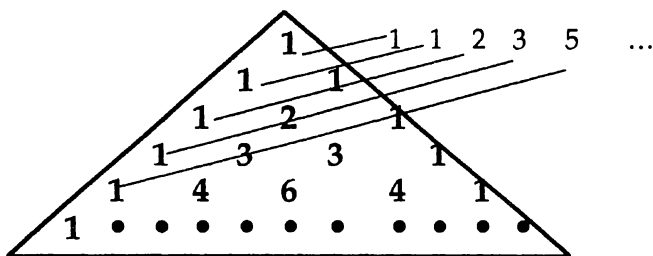
F_n	F_{n+1}	\rightarrow	F_n^2	+	F_{n+1}^2	=	Числа Фибоначчи
2	3	\rightarrow	4 ($= 2^2$)	+	9 ($= 3^2$)	=	13
3	5	\rightarrow	9 ($= 3^2$)	+	25 ($= 5^2$)	=	34
5	8	\rightarrow	25 ($= 5^2$)	+	64 ($= 8^2$)	=	89
8	13	\rightarrow	64 ($= 8^2$)	+	169 ($= 13^2$)	=	233
13	21	\rightarrow	169 ($= 13^2$)	+	441 ($= 21^2$)	=	610
21	34	\rightarrow	441 ($= 21^2$)	+	1156 ($= 34^2$)	=	1597
...

► Третьим числом является 2, и каждое третье число в последовательности делится на 2 ($= 8, 34, 144, \dots$); четвертым числом является 3, и каждое четвертое число в последовательности делится на 3 ($= 21, 144, 987, \dots$); пятым числом является 5, и каждое пятое число в последовательности делится на 5 ($= 55, 610, \dots$); и так далее. Вообще если n -ое число в последовательности есть x , то каждое n -ое число после x оказывается делящимся на x .

Одним из наиболее интригующих открытий, связанных с последовательностью Фибоначчи, является неожиданное свойство, которым обладает **треугольник Паскаля**, названный в честь французского философа и математика Блеза Паскаля (1623–1662), основателя современной теории вероятности. Этот треугольник состоит из треугольного размещения чисел, в котором любое число в заданном ряду есть сумма двух чисел, лежащих в треугольнике непосредственно над ним. Вот фрагмент этого треугольника



Например, первое число 3 в четвертом ряду от вершины равно сумме двух чисел непосредственно над ним ($1 + 2$). Подобным же образом число 6 в пятом ряду равно сумме двух чисел непосредственно над ним ($3 + 3$). Оказывается, что диагональные суммы чисел в треугольнике Паскаля соответствуют числам в последовательности Фибоначчи $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$:



Почему числа Паскаля и Фибоначчи находятся в таком соответствии между собой? Насколько мне известно, на этот вопрос так и не получено ответа. Это соответствие остается тайной и по сей день.

Давайте, взглянем теперь на менее эффектную, но тем не менее зачаровывающую схему в последовательности Фибоначчи. Мы начнем со сложения первых десяти последовательных чисел:

$$1. \quad 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143.$$

Оказывается, что эта сумма делится на 11 ($143 : 11 = 13$). Как это ни удивительно, тот же результат сохраняется для суммы любых десяти последовательных чисел Фибоначчи. Возьмем, например, десять чисел, которые начинаются с 55:

$$2. \quad 55 + 89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1597 + 2584 + \\ + 4181 = 10\,857$$

и

$$10\,857 : 11 = 987.$$

Если рассмотреть эти два результата более внимательно, оказывается, что сумма десяти последовательных чисел равна седьмому числу в выбранной последовательности, умноженному на 11. В примере 1 седьмым числом является 13, и $13 \times 11 = 143$; в примере 2 седьмым числом является 987, и $987 \times 11 = 10\,857$.

На этом месте читатель может спросить: а зачем нужно отыскивать эти схемы? Ведет ли это куда-нибудь? Ах, в том-то и загвоздка, как сказал бы Шекспир. Может показаться, что числа Фибоначчи правят Вселенной. И в самом деле, числа Фибоначчи имеют бесчисленные возможности приложения в исследовании функций, в технике компьютерного программирования и многих других областях математики. И кроме того, как будет вкратце показано в разделе Заключительные замечания, числа Фибоначчи обнаруживаются как в природе, так и во всех видах человеческой деятельности. Счастливая случайность поставила замечательный вопрос перед одним из создателей квантовой механики Полем Дираком (1902–1984), когда он обдумывал открытие того факта, что величина силы взаимодействия между электрическими зарядами и фотонами является константой («постоянной тонкой структуры»), равной $1/137$. Он считал это открытие совершенно удивительным и, как рассказывают, утверждал, что, попав на небеса, задал бы Богу только один вопрос: почему $1/137$? К вопросу Дирака можно было бы добавить: «почему числа Фибоначчи»?

Когда математики стали обнаруживать, что числа Фибоначчи удивительным образом появляются в самых неожиданных местах, они заинтересовались поисками эффективного метода вычисления произвольного числа Фибоначчи. В принципе это не проблема. Чтобы определить, например, сотое число Фибоначчи, все, что необходимо сделать, это сложить вместе 98-е и 99-е числа. Однако это означает, что мы должны определить все числа до 98-го, что может оказаться несколько утомительным. Поэтому в середине XIX века французский математик Жак Бине (1786–1856) вывел формулу, основанную на более ранних вычислениях Леонарда Эйлера (1707–1783) и Абрахама Муавра (1667–1754). Она позволяет нам отыскать любое число Фибоначчи

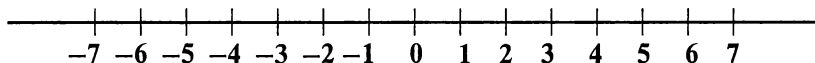
чи, если известен его номер n в последовательности. Вид формулы Бине таков:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Объяснение того, как Бине пришел к этой формуле, выходит за рамки предмета этой главы. Достаточно сказать, что его метод целиком связан с золотым отношением. Читатель может самостоятельно убедиться в полезности этой формулы, подставляя в нее различные значения n .

Последовательности и ряды

Последовательность Фибоначчи в техническом смысле является рядом, то есть последовательностью чисел, которую порождает некоторое правило. *Замечание:* **отрицательным числом** называется число, расположенное слева от нуля на числовой линии:



Отрицательные числа используются, например, для сообщений о температуре воздуха. В этом случае об отрицательной величине говорят, что она «ниже нуля», а не «слева от нуля» (как показано на предыдущем рисунке). Так говорят потому, что числовая линия на термометре обычно прочитывается по вертикали, сверху вниз, а не по горизонтали, слева направо.

Следующие последовательности являются примерами рядов:

1. $-5, -10, -15, -20, -25, \dots$
2. $5, 10, 20, 40, 80, \dots$
3. $1, 3, 5, 7, 9, \dots$
4. $2^2, 2^4, 2^6, 2^8, \dots$

В ряду 1 каждый член отличается от предыдущего на -5 . В ряду 2 каждый член отличается от предыдущего на множитель 2, то есть получается из предыдущего умножением на 2. В ряду 3 каждый член получается из предыдущего прибавлением 2. В ряду 4 каждый

ЧИСЛА

Целые числа

Целые числа включают в себя следующие три группы:

Натуральные числа: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

Ноль: $\{0\}$

Отрицательные числа $\{-1, -2, -3, -4, \dots\}$

Дроби

Примеры дробей:

$\{1/2, -2/3, 7/9, 14/23, \dots\}$

Целые числа и дроби вместе составляют так называемые **рациональные числа**.

Иррациональные числа.

Иррациональные числа – это числа, которые не могут быть представлены в виде целого числа или отношения двух целых чисел. Примеры:

$\{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{19}, \sqrt{23}, \dots\}$

Рациональные и иррациональные числа вместе составляют так называемые **вещественные числа**.

В нашей числовой системе имеются также **трансфинитные** и **комплексные** числа. Первые мы будем обсуждать в главе 6, а последние выходят за рамки настоящей книги.

член отличается от предыдущего на множитель 2^2 , то есть получается из предыдущего умножением на 2^2 . Ряды 1 и 3 называются арифметической прогрессией, а ряды 2 и 4 геометрической прогрессией. Мы обсудим прогрессии в главе 6.

Одним из тех, кто первым начал систематическое изучение рядов, был великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777–1855). Рассказывают, что когда Гауссу было всего десять лет, он поразил своего учителя математики, когда тот поставил классу задачу вычислить сумму чисел от 1 до 100: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 = ?$ Гаусс поднял руку через секунду и дал правильный ответ: 5050. Когда учитель спросил маленького Карла, как ему удалось так быстро получить ответ, говорят, что он ответил более или менее следующее:

Я расположил числа по порядку, удалив из расположения среднее число 50 и последнее число 100: {1, 2, 3, ..., 97, 98, 99}. В этом расположении имеется 49 пар чисел, которые в сумме дают 100. Эти пары получаются следующим образом: первое и последнее число в расположении ($1 + 99 = 100$), второе и предпоследнее числа ($2 + 98 = 100$), третье и третье от конца ($3 + 97 = 100$), и так далее. Это, естественно, дает 4900. Прибавляя сюда удаленные 50 и 100, получаем 5050.

На самом деле Гаусс открыл и опробовал способ суммирования арифметической прогрессии: {1, 2, 3, ..., 100}. Задача, предложенная Гауссу и его одноклассникам, может быть выражена в более общей форме следующим образом: какова сумма последовательности из n чисел: {1, 2, 3, ..., n }? Ответ: $n(n+1)/2$. Подставляя 100 вместо n , получаем ответ:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{(100)(101)}{2} = \frac{10\ 100}{2} = 5050.$$

Чтобы понять, как была выведена эта формула, давайте запишем на бумаге примерно то, что Гаусс проделал в своей голове, но с небольшими видоизменениями. Сначала запишем численный ряд в прямом порядке, а потом в обратном порядке, располагая один ряд над другим:

(1)	1	2	3	...	100
	↓	↓	↓	↓	↓
(2)	100	99	98	...	1

Далее сложим два числа каждого столбца вместе:

(1)	1	2	3	...	100
+	+	+	+		+
(2)	100	99	98	...	1
Сумма	101	101	101	...	101

Заметим, что в каждом случае сумма одна и та же: 101. Сколько раз мы получили эту сумму? Поскольку имеется 100 столбцов, эта сумма встречается 100 раз. Таким образом, общая сумма столбцов есть $100 \times 101 = 10\ 100$. Заметим, что это удвоенная сумма всех целых чисел от 1 до 100. Почему? Потому что мы сложили вместе

два ряда — верхний представляет исходные числа в прямом порядке, а нижний — в обратном порядке. Поэтому все, что нам остается сделать, это разделить всю сумму пополам: $10\ 100/2 = 5050$. Предыдущие вычисления можно суммировать в арифметической формуле:

$$\text{сумма первых 100 членов} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050.$$

Давайте теперь обобщим эту арифметическую формулу. Заметим, что 101 на 1 больше, чем число членов в ряду, 100. Таким образом, если n — число членов ряда, то $(n + 1)$ на 1 больше чем n и

$$\begin{array}{ccc} n & (n + 1) \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{Сумма первых 100 членов} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050. \end{array}$$

$$\text{Сумма первых } n \text{ членов} = \frac{n \times (n + 1)}{2}.$$

Эту формулу можно записать в более общепринятом виде $S_{(n)} = n(n + 1)/2$. Давайте попробуем применить ее к случаю $n = 15$, вычислив сумму первых пятнадцати чисел $\{1, 2, 3, 4, \dots, 15\}$:

$$S_{(n)} = n(n + 1)/2 = 15(15 + 1)/2 = (15)(16)/2 = 240/2 = 120.$$

Мы вернемся к теме рядов в главе 6. Здесь достаточно будет заметить, что исследование рядов стало возможным в первую очередь благодаря десятичной системе. Как мы упоминали ранее, ее появлению математика в большой степени обязана усилиям Фибоначчи. Да и сама последовательность Фибоначчи едва ли столь просто могла бы проявлять себя во многих скрытых и загадочных схемах, если бы не была записана десятичными числами.

Заключительные замечания

Число схем, которые содержатся в последовательности Фибоначчи и которые продолжают извлекать из нее математики, по-

видимому, бесконечно. Но не только они составляют историю этой поистине замечательной последовательности. По некоторым таинственным причинам числа Фибоначчи то тут, то там всплывают в природе. Число лепестков у маргариток имеет тенденцию быть равным 21, 34, 55 и 89 (восьмой, девятый, десятый и одиннадцатый члены последовательности); триллиумы, дикие розы, кровавый корень и водосбор, лилии и ирисы также имеют числа лепестков соответствующие последовательно расположенным числам Фибоначчи. И вообще, если мы от нижнего конца стебля начинаем счет вверх, то оказывается, что последовательности листьев управляются некоторыми наборами следующих друг за другом чисел из последовательности Фибоначчи. И это еще не все: числа Фибоначчи постоянно появляются в формах, творимых человеком и в его деятельности. Например, основные аккорды музыки западного мира строятся из третьих, пятых и восьмых тонов музыкальной шкалы, то есть из тонов, соответствующих четвертому, пятому и шестому членам последовательности Фибоначчи.

По сути, тот, кто знает, как смотреть, найдет числа Фибоначчи в растениях, стихах, симфониях, художественных формах и компьютерах, в Солнечной системе и на фондовой бирже. На эту тему написано несчетное количество книг и статей. Осознание того, что все эти «неожиданные открытия» могут быть, в конце концов, прослежены до простой головоломки, предназначавшейся для иллюстрирования практичности индо-арабской системы счисления, поистине приводит рассудок в трепет. Веру пифагорейцев в то, что математика является тайным языком космоса, по-видимому, определенно подтверждают эти «чудесно обретенные» появления чисел Фибоначчи в человеческой истории. (Способность увидеть то, что не укладывается в рамки известного, английские авторы обозначают словом «serendipity». Это слово ввел в обращение в 1754 г. писатель Хорас Уолпол (1717–1797) в рассказе «Три принца из Серендипа», области на Цейлоне. Принцы обладали способностью делать во время путешествий неожиданные открытия, во все не стремясь к этому, и находить вещи, которые и не собирались искать.)

Между прочим, подобного рода наблюдения можно привести и в отношении золотого сечения, которое древние греки называли числом *фи*. Это отношение описывает спиральные формы морских раковин, еловых шишек и другие симметрии в природе. Го-

ворят, что Леонардо да Винчи и Микеланджело сверялись с ним при создании своих шедевров изобразительного искусства. И оно явным образом обнаружено в пропорциях, которыми пользовались при постройке египетских пирамид и греческого Парфенона. Как подозревали пифагорейцы, число *фи* может давать важный ключ к пониманию того, как функционирует Вселенная, так же как последовательность Фибоначчи дает подобные ключи для вещества.

Упражнения

Выявление схем

26. В последовательности Фибоначчи присутствует бесконечное количество схем. Сколько из них вы можете указать?

27. Построим ряд, в котором каждое число является суммой трех предыдущих, начиная с 1, 2, 3:

$$\{1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, 68, 125, 230, 423, 778, \dots\}.$$

Можете ли вы найти какую-нибудь схему в этой последовательности?

Головоломки разных типов

Перед Фибоначчи стояла цель ввести десятичную числовую систему в европейскую аудиторию с помощью головоломок и практических задач. Далее приводятся хитроумные головоломки, которые тем не менее могут быть легко решены с помощью этой системы.

28. В конце концов, Тим пришел к осознанию того, что курение вредно и просто глупо. Поэтому он решил бросить курить, как только прикончит двадцать семь сигарет, остающихся у него в кармане. Тим обычно выкуривал только две трети сигареты за один раз. У него также была привычка свертывать из окурков новые сигареты и потом их выкуривать. Если он курил только по одной си-

гарете в день, то сколько же дней должно пройти, прежде чем он окончательно бросит свою вредную привычку?

29. На вечеринке присутствуют от пятидесяти до шестидесяти человек. Джейн считает их по одному за раз, пока не замечает, что если бы она считала по три за раз, то при этом методе счета осталось бы два не сосчитанных человека, Однако если бы она считала по пять человек за раз, то не сосчитанными остались бы четыре человека. Сколько человек было на вечеринке?

30. На столе стоят два сосуда, А и В. В в два раза больше, чем А. Сосуд А наполнен вином наполовину, а В на одну четверть. Оба сосуда затем доливаются водой и переливаются в третий сосуд, С. Какова доля вина в смеси, находящейся в сосуде С?

31. Во время пожара на складе товаров пожарник стоял на средней ступеньке пожарной лестницы, поливая водой горящий склад, Через минуту он поднялся на три ступеньки и продолжал направлять воду на здание из нового положения. Через несколько минут он спустился на пять ступенек и из новой позиции продолжил заливать воду в здание. Полчаса спустя он вскарабкался на семь ступенек и поливал склад из этого положения до тех пор, пока огонь не был потушен. Затем он преодолел оставшиеся семь ступенек до крыши склада, чтобы оттуда осмотреть поле боя. Сколько ступенек было на лестнице?

Ряды

32. Как мы видели в этой главе, сумма арифметической прогрессии определяется формулой $S_{(n)} = n(n + 1)/2$. Мы упоминали и второй главный тип ряда, называемый геометрической прогрессией, который определяется как ряд, каждый последующий член которого отличается от предыдущего на постоянный множитель. Например, в следующем ряду каждый член отличается от предыдущего множителем 2:

$$\{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots\}.$$

Лежащая в основе этого ряда структура выглядит так:

<u>1-й член</u>	<u>2-й член</u>	<u>3-й член</u>	<u>4-й член</u>	...	<u>n-й член</u>
2	$4 = 2 \times 2$	$8 = 4 \times 2$	$16 = 8 \times 2$...	?

Можете ли вы вывести формулу для общего члена этого ряда?

33. Что, если учитель Гаусса попросил бы класс просуммировать только четные числа от 1 до 100? Можете ли вы предложить путь быстрого решения этой задачи? А каким способом вы бы нашли сумму всех нечетных чисел от 1 до 100?



Эйлер и Кенигсбергские мосты

Если бы мне пришлось пожелать чего-нибудь, я не пожелал бы здоровья и власти, но пожелал бы страстного ощущения возможности, пожелал бы зрения, которое, пусть даже оно молодое и горячее, видит возможное. Наслаждение влечет разочарование, возможность никогда. И нет вина более игристого, более благоуханного и более пьянящего, чем возможность.

СЁРЕН КИРКЪЕГОР (1813–1855)

Будучи одним из величайших и наиболее результативных математиков в истории, Леонард Эйлер, безусловно, не тратил времени на рассмотрение вещей тривиальных. Поэтому тот факт, что он создавал головоломки для исследования или моделирования математических идей, говорит о многом. Например, в 1779 г. он придумал знаменитую головоломку о тридцати шести офицерах, чтобы исследовать свойства чисел, размещенных в виде строк и столбцов. Идея этой схемы в скором времени привела к появлению в алгебре понятия *матрицы*. **Матрицу** определяют как таблицу чисел или алгебраических символов, которая может быть использована для выпол-

нения над числами или символами действий, дающих определенные математические результаты, например, арифметические.

Однако наиболее важной головоломкой Эйлера является его головоломка о Кенигсбергских мостах, которую он сформулировал в знаменитой статье 1736 г., носившей наименование «Семь мостов Кенигсберга». Он, без сомнения, подозревал, что эта головоломка породит значительные последствия в математике. Но даже он, вероятно, не смог бы вообразить, сколь много революционных прозрений она содержит, прозрений, которые в конечном счете привели к становлению двух автономных ветвей математики, известных сегодня как теория графов и топология. По этой причине, и потому, что она не перестает увлекать людей, которые сталкиваются с ней впервые, головоломка Эйлера, очевидно, может занять место в десятке лучших головоломок всех времен.

Головоломка

В немецком городе Кенигсберге (ныне российском Калининграде. — *Примеч. пер.*) течет река Перголя. На реке есть два острова, которые во времена Эйлера были связаны с материком и друг с другом семью мостами. Жители города часто спорили, возможно ли, начав путь в некоторой точке города, пройти по каждому из мостов ровно один раз и вернуться в начальную точку. Никто не мог найти способа сделать это, но, с другой стороны, никто и не мог объяснить, по-

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР (1707–1783)

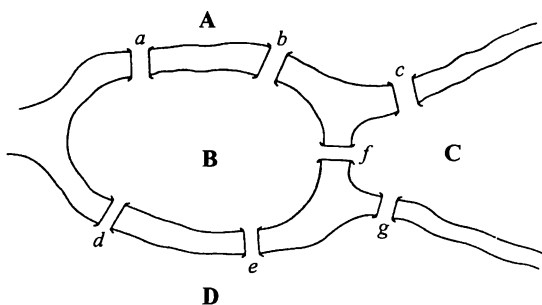
Эйлер родился в швейцарском городе Базеле. Он учился у Иоганна Бернулли (1667–1748), сыгравшего важную роль в развитии дифференциального исчисления. С 1727 по 1766 г. он занимал должность профессора математики и физики в учебных заведениях Санкт-Петербурга и Берлина. Главным его вкладом в науку был вклад в теорию чисел, раздел математики, становлению которого Эйлер содействовал.

В своем труде «Введение в анализ бесконечно малых» (1748), Эйлер впервые дал полное изложение принципов и методов алгебры, тригонометрии и аналитической геометрии. Будучи главным образом математиком, он также внес свой вклад в астрономию, механику, оптику и акустику.

чему это, видимо, невозможно. Эйлер заинтересовался этими спорами, превратив их в одну из величайших головоломок всех времен:

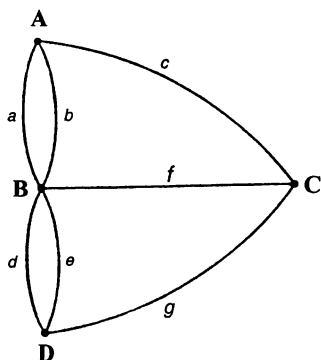
Возможно ли в городе Кенигсберге пройти по каждому из семи мостов через реку Перголя, связывающих два острова и материк, не проходя ни по одному из мостов дважды.

На следующей схематической карте территории заглавными буквами (**A**, **B**, **C**, **D**) обозначены области суши, а строчными буквами (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*) обозначены мосты:



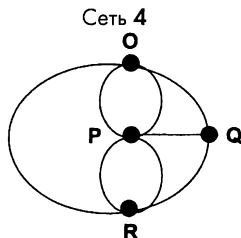
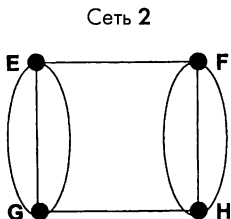
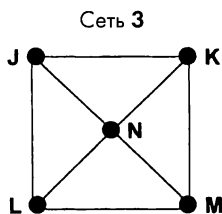
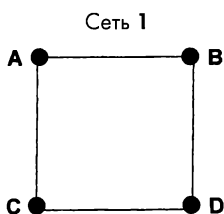
Эйлер нашел доказательство того, что провести путь через мосты, не проходя по крайней мере по одному из них дважды, невозможно. Он начал с того, что свел карту территории к контурной форме, известной как *граф*, и переформулировал головоломку следующим образом:

Возможно ли обвести следующий граф не отрывая карандаша от бумаги и не проходя ни одного ребра дважды?



Эйлер понял, что описание этой головоломки с помощью графа дает более удобное для работы представление ситуации, поскольку не принимает во внимание не относящиеся к делу очертания массивов суши и мостов, сводя их к *узлам* или *вершинам* и изображая мосты *линиями* или *ребрами*. В современной теории графов это называется *сетью*.

Для того чтобы понять решение Эйлера, полезно рассмотреть несколько простых сетей с разными четными и нечетными вершинами. Четной вершиной называется вершина, в которой сходится четное число линий, а нечетной называется вершина, в которой сходится нечетное число линий.



В сети 1 в каждой из ее четырех вершин сходится четное число (два) прямых линий. Начав с любой вершины, эту сеть можно легко обойти, не пройдя ни по одной линии дважды. В сети 2 в каждой из ее четырех вершин сходится также четное число линий (четыре — две прямые и две изогнутые). И снова, как может убедиться читатель, без труда удастся обвести сеть карандашом, не проходя по второму разу уже пройденные линии. В сети 3 в каждой из ее четырех внешних вершин (J, K, L, M) встречается нечетное число линий, а во внутренней вершине, N, это число четное (четыре). Эту сеть невозможно обойти, не проходя одной и той же линии дважды. В сети 4 верхняя вершина O четна, так как в ней встречаются четыре искривленных линии; вершина P прямо под ней, с одной прямой и двумя искривленными линиями, встречающимися

ся в ней, является нечетной; нижняя вершина **R** четна, потому что в ней встречаются четыре искривленных линии; и, наконец, вершина **Q** ниже справа нечетна, так как в ней встречаются одна прямая и две искривленных линии. В целом здесь присутствуют две четных и две нечетных вершины. Сеть 4 можно обойти, не проходя дважды ни одной линии (как читатель может убедиться самостоятельно).

Имеется ли здесь скрытая схема? Создавая более сложные сети, с увеличивающимся числом линий и вершин в них, мы увидим, что сеть невозможно пройти без повторных прохождений одной из ее линий, если она содержит более двух нечетных вершин. Именно этот факт Эйлер доказал удивительно простым способом.

► Сеть может содержать любое число четных вершин, поскольку все линии в четной вершине могут быть использованы без повторного прохождения любой из них. Например, если у вершины всего две линии, то одна линия служит для того, чтобы достичь вершины, а другая, чтобы покинуть ее. Обе линии, таким образом, можно использовать так, что не придется проходить дважды ни одну из них. Рассмотрим другой пример, вершину с четырьмя линиями. Первая линия входит в вершину, вторая из нее выходит. Тогда третья линия снова приводит нас в вершину, а четвертая выводит из нее. Все линии используются по одному разу. Те же соображения применимы к любой четной вершине.

► С другой стороны, в нечетной вершине всегда остается одна неиспользованная линия. Например, в вершине с тремя линиями одна линия служит для того, чтобы достичь вершины, а другая, чтобы покинуть ее. Но третья линия может служить только для возвращения в вершину. Чтобы покинуть ее, нам придется снова пройти по одной из трех линий. Те же соображения применимы к любой нечетной вершине.

► Поэтому сеть может иметь самое большее две нечетных вершины. И они должны быть начальной и конечной вершинами. Почему? Давайте обозначим одну нечетную вершину буквой **A**, а другую буквой **B**. Будучи четной, вершина **A** содержит одну неиспользованную линию. Вершина **B** тоже содержит одну неиспользованную линию. Однако если одной из этих линий воспользоваться как начальной, а другой для того, чтобы выйти из сети, обе они окажутся задействованы.

► Однако если в сети содержатся другие нечетные вершины, то найдется линия или линии, которые придется проходить дважды.

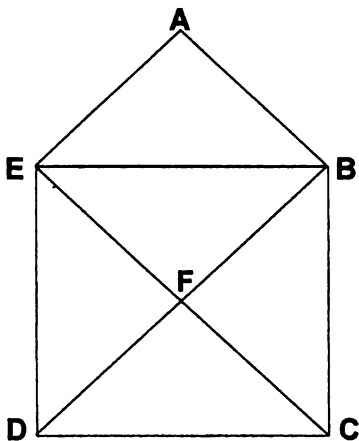
Приложим теперь это правило к построенному выше графу Кенигсбергских мостов. Эта сеть содержит четыре вершины. Как читатель может самостоятельно убедиться, каждая из них является нечетной: $A = 3$, $B = 5$, $C = 3$, $D = 3$. Это значит, что сеть невозможно обвести одним движением карандаша, не проходя второй раз по одному из путей, которые уже были пройдены. Итак, своим остроумным решением Эйлер разрешил споры вокруг Кенигсбергских мостов раз и навсегда.

Математические комментарии

Нелегко сколько-нибудь детально описать все последствия головоломки Эйлера для современной теории графов, топологии и математических исследований неразрешимости. Одно только их описание заняло бы огромный том. В текущем обсуждении мы ограничимся ознакомлением с основными понятиями этих дисциплин.

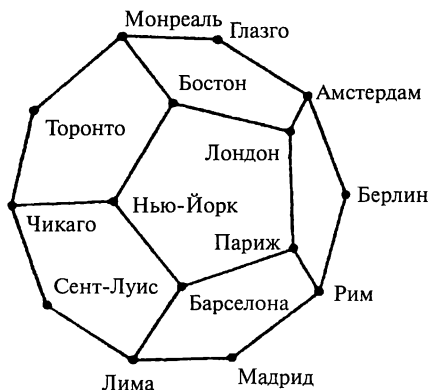
Теория графов и топология

Теория графов очень серьезно повлияла на методы математических исследований, соединив области, которые прежде казались совершенно изолированными. **Теория графов** теперь является областью математики, которая имеет дело с описанием всех видов графов. **Графом** называется любая диаграмма, состоящая из узлов (называ-



емых также вершинами), которые могут быть связанными или не связанными дугами (называемыми также ребрами). Графы размерностей больше двух бывают **планарными**, если их можно положить на плоскость так, чтобы ребра не пересекались, и **непланарными**, в противном случае. Путь, проходящий через все ребра графа всего по одному разу, называется **эйлеровым циклом**. Путь **D-E-A-B-C-F-E-B-F-D-C** в нарисованном ниже графе, как легко может убедиться читатель, является эйлеровым циклом.

Хорошо известным примером графа, который может быть или не быть эйлеровым циклом, является **гамильтонов цикл**, названный по имени ирландского математика Уильяма Роуэна Гамильтона (1805—1865). Формально это путь, проходящий через каждую вершину графа только один раз, за исключением, возможно, начальной и конечной вершин, которые могут быть одной вершиной. Гамильтон представил свой цикл в 1857 г. в виде игры, названной им «Вокруг света». Целью игры было совершить путешествие вокруг земного шара по ребрам, изображенным на карте, расположенной ниже, так, чтобы посетить каждый из двадцати городов лишь один раз:

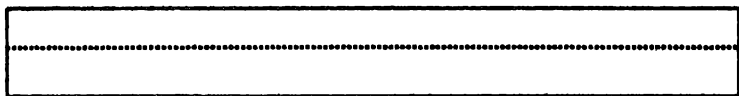


Лично пройти гамильтонов цикл и найти эйлеров цикл, если он существует, это лишь дело проб и ошибок, озарения и удачи! Читатель может пожелать сыграть в игру, придуманную Гамильтоном, и самостоятельно выяснить, можно ли совершить путешествие по этой карте, соблюдая оговоренное условие.

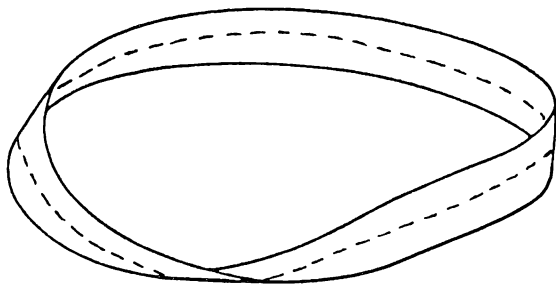
Спустя несколько десятилетий после того, как Эйлер решил задачу о Кенигсбергских мостах, математики начали изучать фигуры, сохраняющие свои структурные характеристики после деформа-

ции. Рассмотрение таких фигур привело через некоторое время к исследованию форм и их свойств, постепенно развившемуся в независимую область математики, называемую топологией. Первый всесторонний трактат по этой дисциплине, названный «Теория элементарных связей», был опубликован в 1863 г. Его автором был немецкий математик Август Мёбиус (1790–1868), который изобрел поистине загадочную фигуру, называемую **листом Мёбиуса**.

Чтобы сделать эту фигуру, начнем с того, что проведем пунктирную прямую линию посередине плоской прямоугольной полоски бумаги. Закрутим полоску на пол-оборота (на 180 градусов) и склеим ее концы. Мы рекомендуем читателю выполнить эти инструкции, чтобы получить такую фигуру в свое распоряжение.

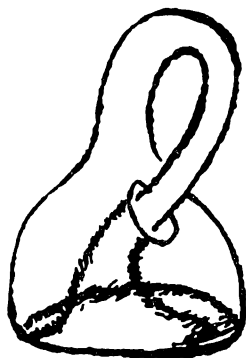


Сколько сторон, по-вашему, у этой ленты? Проход карандаша вдоль пунктирной линии приводит нас обратно в точку, с которой мы начали:

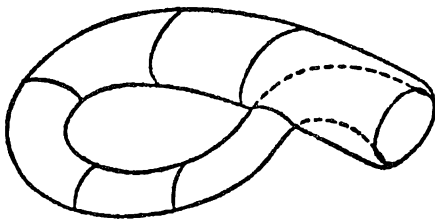


Оказывается, что эта лента имеет лишь одну сторону, хотя склеенная полоска в начале имела две стороны. Еще более озадачивающим является тот факт, что если разрезать лист Мёбиуса на две части по карандашной линии, он не распадется. Волшебным образом, как читатель может проверить самостоятельно, мы получим две кольцевых ленты, сцепленные друг с другом как звенья цепи. Это образование, состоящее из двух лент, вдвое длиннее и вполонину уже первоначальной ленты!

Немецкий математик Феликс Кляйн (1849–1925) настолько пленился лентой Мёбиуса, что придумал в 1882 г. ее «бутылочную» версию, известную, соответственно, как **бутылка Кляйна**:



Эта бутылка представляет собой одностороннюю замкнутую поверхность, не имеющую краев. Внутри у нее ничего нет! Действительно, если налить в нее воду, она вытечет, через то самое отверстие, через которое была налита. Если ее разрезать вдоль надвое, она превратится в два листа Мёбиуса. Как же Кляйну удалось сделать эту бутылку, бросающую вызов здравому смыслу? Ее основной конструктивный принцип на самом деле чрезвычайно прост. Возьмите резиновую трубку и прорежьте в ней отверстие так, чтобы один конец можно было вставить в нее, как показано на рисунке:



В результате получаем замкнутую поверхность, не имеющую разрывов. Если мы из любой точки начнем проделывать путь, пересекающий эту поверхность, мы сможем закончить его в той точке, из которой начинали, независимо от того, проникали мы сквозь поверхность или нет. Мы все равно находимся на ее «внешней» стороне.

Тут читатель может задать вопрос: все это, конечно, очень интригующе, но какова польза от этих топологических диковин? Ответ на этот вопрос мог бы занять большой том. Достаточно здесь

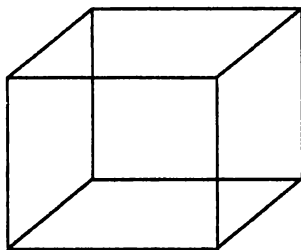
сказать, что эти причудливые формы оказались важны не только для развития топологии, но из них проистекло множество приложений и следствий: конвейерные ленты и магнитофонные пленки, спроектированные в виде листа Мёбиуса, одинаково изнашиваются с обеих сторон и поэтому способны служить в течение существенно большего периода времени; структуру Мёбиуса имеет ДНК; Вселенная, по мнению многих ученых, тоже имеет именно эту структуру, и такой список можно продолжать и продолжать.

Топология как таковая имеет дело с определениями таких вещей как *внутренние* и *внешние* области геометрических форм. Например, круг делит плоскость на две области, внутреннюю и внешнюю. Точку вне круга нельзя связать с точкой внутри круга непрерывной линией на плоскости, не пересекая границы круга. Если деформировать плоскость так, что она больше не будет плоской или гладкой, окружность может превратиться в зигзагообразную кривую, но она будет продолжать делить эту поверхность на внутреннюю и внешнюю области. Это свойство является определяющей структурной характеристикой. Топологи изучают фигуры любого вида. Они исследуют, например, узлы, которые можно скручивать, растягивать или деформировать любым другим способом, но только без разрывов и склеиваний. Два узла считаются эквивалентными, если один можно получить из другого с помощью подобной деформации; в противном случае эти узлы различны.

Эйлер и сам открыл несколько фундаментальных топологических свойств геометрических фигур. Например, в случае трехмерной фигуры он обнаружил, что если мы из числа ее вершин (v) вычтем число ее ребер (e), а затем прибавим число ее граней (f), то в результате всегда получается 2:

$$v - e + f = 2.$$

Например, возьмем куб:

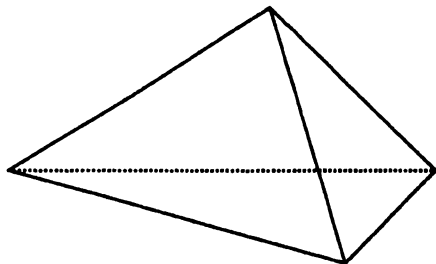


Сколько он имеет вершин (острых уголков)? Ответ — восемь. А сколько у него ребер? Ответ будет — двенадцать. А сколько он имеет граней (плоских сторон)? Ответ — шесть. Подставив теперь эти значения в формулу, вы можете видеть, что соотношение, которое она выражает, выполняется.

$$v - e + f = 2$$

$$8 - 12 + 6 = 2.$$

Давайте применим теперь нашу формулу к тетраэдру (пирамиде):

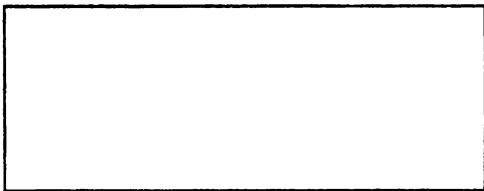


Как нетрудно видеть, в этом случае имеется четыре вершины, шесть ребер и четыре грани. Таким образом:

$$v - e + f = 2$$

$$4 - 6 + 4 = 2.$$

Эйлер также доказал, что для плоских фигур величина $v - e + f = 1$, а не 2. Например, прямоугольник имеет четыре вершины, четыре ребра и одну грань:



Поэтому:

$$v - e + f = 1$$

$$4 - 4 + 1 = 1.$$

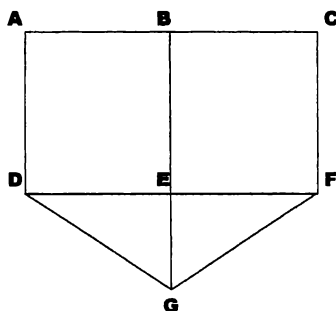
Граф Кенигсбергских мостов, будучи плоским графом, тоже обладает этим свойством. Он имеет четыре вершины, семь ребер и четыре грани.

Поэтому:

$$v - e + f = 1$$

$$4 - 7 + 4 = 1.$$

Возьмем в качестве последнего примера следующий граф:

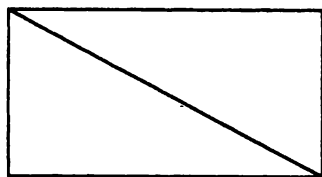


Число вершин (A, B, C, D, E, F, G) равно семи, число ребер (AD, DE, AB, BE, BC, CF, EF, FG, EG, DG) равно десяти, а число граней равно четырем (прямоугольники ADEB, BEFC и треугольники DEG, EFG). Таким образом:

$$v - e + f = 1$$

$$7 - 10 + 4 = 1.$$

Эйлер доказал это соотношение с помощью замечательно простой процедуры. Например, рассмотрим следующий прямоугольник, содержащий диагональ, в терминах теории графов $v = 4$, $e = 5$ и $f = 2$:

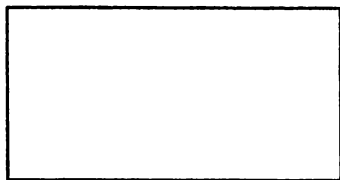


Таким образом:

$$v - e + f = 1$$

$$4 - 5 + 2 = 1.$$

Если мы уберем диагональ, представляющую собой ребро, мы уменьшим также и число граней на единицу, поскольку граф превращается в прямоугольник. Так как число вершин остается неизменным, соотношение сохраняется:



$$v - e + f = 1$$

$$4 - 4 + 1 = 1.$$

Вообще, если мы удаляем из графа ребро, мы одновременно удаляем из него грань. Это оставляет неизменным правую часть соотношения. Далее, если мы удаляем вершину, мы также удаляем и одно из входящих в нее ребер. Это уменьшает на единицу v и e , но снова оставляет неизменным правую часть соотношения.

Неразрешимость

Головоломка о Кенигсбергских мостах не только привела к фундаментальным прозрениям, положившим начало становлению двух новых областей математики: теории графов и топологии, но также имела существенные последствия для исследований математической неразрешимости. Демонстрация того, что кенигсбергскую сеть невозможно обойти без повторного прохождения, по крайней мере, одного ребра, сделанная Эйлером, показала, как можно подходить систематически к вопросам неразрешимости.

В качестве еще одного примера того, как можно показать, что нечто является невозможным, рассмотрим следующую задачу.

Найдите пять последовательных нечетных чисел, дающих в сумме 64.

Начнем с рассмотрения суммы первых пяти нечетных чисел последовательности:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

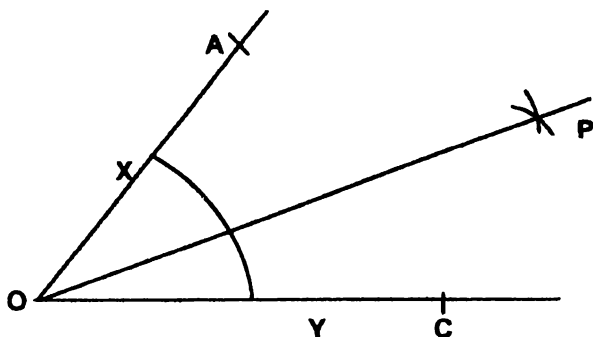
Если мы продолжим вычисление сумм, получающихся путем сложения элементов множеств из пяти последовательных нечетных чисел, то мы обнаружим, и читатель может убедиться самостоятельно, что эти суммы постоянно оказываются нечетными. Поэтому представляется невозможным получить четную сумму, такую как 64, путем сложения пяти последовательных нечетных чисел.

Есть ли какой-нибудь способ это доказать? Как указано в ответе на Упражнение под номером 11 (глава 1), любое нечетное число можно выразить формулой $(2n + 1)$. Поскольку два идущих подряд нечетных числа различаются на 2, например, 1 и 3 отличаются на 2, 5 и 7 отличаются на 2, и так далее, то, если первое число в последовательности пяти идущих подряд нечетных чисел представимо в виде $(2n + 1)$, следующее за ним имеет вид $(2n + 3)$, третье — $(2n + 5)$, четвертое — $(2n + 7)$ и пятое — $(2n + 9)$. Сложение пяти последовательных нечетных чисел дает следующий результат:

$$(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5) + (2n + 7) + (2n + 9) = (10n + 25).$$

Рассмотрим теперь выражение $(10n + 25)$. Член $10n$ в нем является числом, оканчивающимся на 0, поскольку любое число n , умноженное на 10, всегда дает число с нулем на конце: $1 \times 10 = 10$, $2 \times 10 = 20$, $15 \times 10 = 150$, и так далее. Вторым членом этого выражения является число 25. Оно прибавляется к предшествующему числу, оканчивающемуся на 0. Это означает, что результат будет всегда оканчиваться на цифру 5: $10 + 25 = 35$, $20 + 25 = 45$, $150 + 25 = 175$, и так далее. Итак, выражение $(10n + 25)$ определяет нечетное число, независимо от значения n .

Древние греки постоянно сталкивались с проблемой неразрешимости, удивляясь, к примеру, почему невозможно разделить угол на три равные части с помощью циркуля и линейки при том, что деление на две части выполняется так просто. Чтобы разделить угол $\angle AOC$, изображенный на рисунке ниже, на две равные части, поместите циркуль в точку O и нарисуйте дугу, пересекающую стороны угла в точках X и Y . Затем раздвиньте циркуль на ширину, большую, чем половина расстояния между X и Y . Теперь поместите циркуль в точку X и нарисуйте дугу внутри $\angle AOC$. Повторите эту операцию, поместив циркуль в точку Y . Пометьте точку пересечения дуг буквой P . Наконец, нарисуйте линию OP . Эта линия делит $\angle AOC$ пополам.



Многие годы пытались математики с помощью циркуля и линейки провести «трисекцию» угла, то есть разделить его на три равные части, но всегда безуспешно. Для того чтобы показать невозможность этой операции, пришлось ждать создания и распространения метода Декарта, превращающего любую геометрическую задачу в задачу алгебраическую. Доказательство того, что трисекция угла невозможна, основано на этом методе. Оно появилось в XIX веке, после того, как математики установили, что уравнение, соответствующее трисекции, должно иметь степень 3, то есть оно должно быть уравнением, в котором одна из его переменных возведена в третью степень, например, $x^3 - 2x^2 + x = 0$. С другой стороны, построения, выполняемые с помощью циркуля и линейки, переходят в уравнения второй степени, например, $x^2 - 14 = 0$. Поэтому провести трисекцию с помощью циркуля и линейки невозможно. Формальное доказательство в 1837 г. опубликовал математик Пьер Лоран Ванцель (1814–1848).

Завершая обсуждение неразрешимости, нельзя не упомянуть головоломку «Пятнашки», которую создал в 1878 г. Сэм Лойд, один из самых изобретательных создателей головоломок (мы еще встретимся с ним в главе 7). Появившись как новая игрушка массового производства, она превратилась в манию, которая захлестнула Америку и Европу. Работодатели во многих штатах даже вывешивали объявления, запрещающие играть в эту игру в рабочее время. Во Франции ее считали более опасным злом, чем алкоголь или табак. Она до сих пор остается популярной, и ее решают по всему миру.

Лойд поместил пятнадцать последовательно пронумерованных скользящих квадратных блоков на квадратную пластмассовую подложку, имеющую размер, достаточно большой для того, чтобы вме-

щать шестнадцать таких квадратов. Блоки размещаются в последовательном порядке соответственно их номерам, за исключением двух, четырнадцатого и пятнадцатого, которые уложены в обратном порядке. Целью головоломки является размещение блоков в правильной числовой последовательности от 1 до 15, перемещая их по одному на пустой квадрат и не вынимая из рамки:

Головоломка «Пятнашки»

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Оказалось, что эту головоломку решить невозможно, но тем не менее она принесла лукавому Лойду изрядные деньги. Люди просто не могли проигнорировать брошенный им вызов, не считаясь с тем, сколько времени и энергии они потратят. Между прочим, Лойд назначил приз в 1000 долларов за первое правильное решение, отлично зная, что эта головоломка не будет решена никогда.

Заметим, что если блоки лежат в правильном порядке, то за каждым из них следует блок с номером в точности на единицу больше (за 1 следует 2, за 2 следует 3, и так далее).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

В любом другом расположении за некоторыми блоками будут следовать блоки с более низкими номерами (например, за 2 следует 1, за 4 следует 3, и так далее). Каждый случай, когда за блоком следует блок с более низким, чем у него, номером, может быть на-

зван инверсией. Если полное число всех инверсий в данном расположении четно, задача имеет решение. Если это число нечетно, решение невозможно. Например, изображенная ниже последовательность блоков может быть перестроена в последовательность с правильным числовым порядком, поскольку полное число инверсий в ней равно 6, четному числу (за 2 следует 1, за 4 следует 3, за 6 следует 5, за 8 следует 7, за 10 следует 9, за 12 следует 11):

2	1	4	3
6	5	8	7
10	9	12	11
13	14	15	

Игра Лойда имеет только одну инверсию (за 15 следует 14). Это число нечетно, и поэтому расположить блоки в правильном числовом порядке невозможно.

Заключительные замечания

Теория графов и топология не выделялись в обособленные области математики вплоть до середины XIX века, но не вызывает сомнений, что их основа была заложена головоломкой Эйлера. И, как мы увидели в этой главе, метод, использованный Эйлером для решения головоломки, лег также в основу систематических исследований математического понятия «неразрешимости».

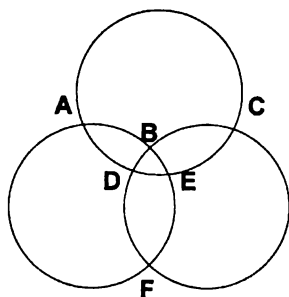
Все это выявляет пути, на которых разворачивается прогресс в математике. Во-первых, возникает прозрение (обычно при решении головоломки). Потом это приводит к появлению ряда предположений, которые, будучи доказанными, становятся теоремами. Доказательства теорем основываются на определениях, теоремах, доказанных ранее, и логических умозаключениях. Затем они дают возможность математикам не только лучше понять первоначальную догадку, но и увидеть связи между идеями и фактами, которые прежде рассматривались как изолированные или не связанные друг с другом, но, как теперь выясняется, объединены общей структурой.

Упражнения

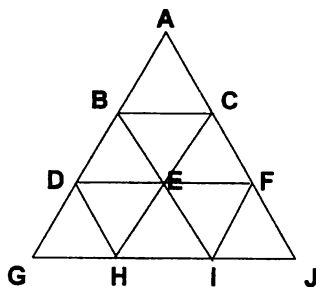
Графы и сети

34. Начнем с нескольких простых тренировочных упражнений. Следующие два графа являются эйлеровыми. Найдите эйлеров цикл в каждом из них:

A.

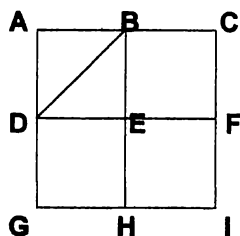


B.

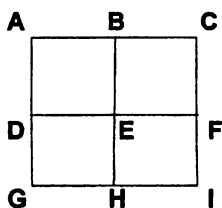


35. Укажите, какой из следующих путей является эйлеровым циклом, а какой нет:

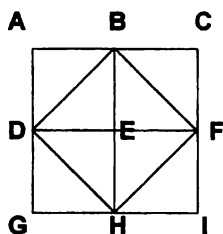
A.



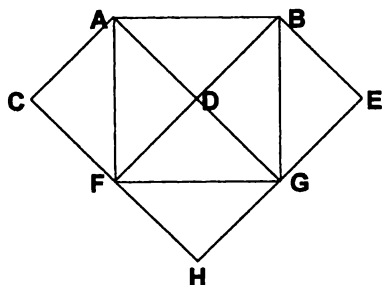
B.



C.

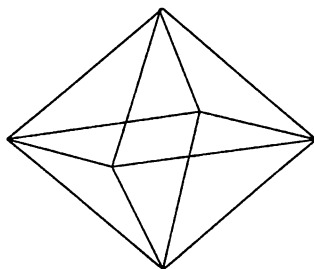


D.



36. Постройте два произвольных графа: эйлеров и неэйлеров. Это даст вам возможность непосредственно и творчески исследовать основные темы настоящей главы.

37. Проверьте правильность соотношения Эйлера $v - e + f = 2$ для октаэдра (восьмигранная трехмерная фигура):



38. Проверьте правильность соотношения Эйлера $v - e + f = 1$ для следующих плоских фигур:

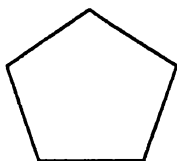
А. треугольник



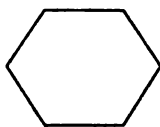
В. квадрат



С. пятиугольник

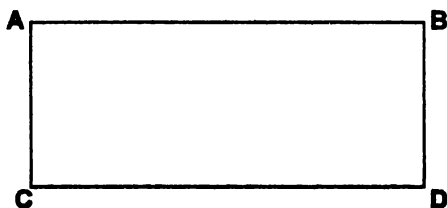


Д. шестиугольник

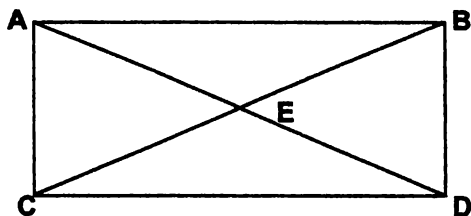


Удалось ли вам обнаружить схему?

39. Прямоугольник является эйлеровым циклом, поскольку его можно обойти без повторного прохождения какого-либо ребра (стороны):



Эйлеровский цикл — это путь $A - C - D - B - A$. Однако если мы добавляем к прямоугольнику диагонали, мы получаем неэйлеров граф, поскольку каждая из четырех вершин становится нечетной, так как в них сходятся теперь три ребра. Единственной четной вершиной была бы точка пересечения диагоналей E , в которой сходятся четыре ребра:



Можете ли вы превратить этот граф в эйлеров?

Невозможность

40. Рекомендуем читателю сделать модель головоломки Лойда из подручных средств, а затем расположить блоки так, чтобы головоломка стала разрешимой. Вот одно из «разрешимых» размещений.

2	1	4	3
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

41. Можете ли вы найти два последовательных нечетных числа, произведение которых равно 316?



Задача Гурти о четырех красках

То место, в котором о теории можно сказать,
что она истинна, не достигается никогда.

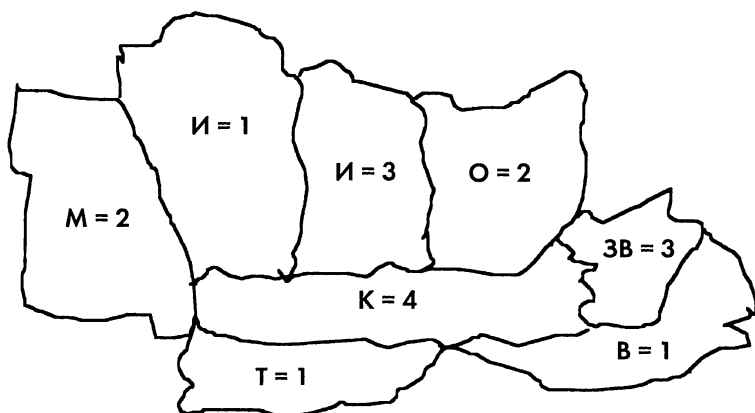
Самое большее, что можно сказать о любой
теории, это то, что она содержит в себе успехи
всех соперничающих теорий и что она
выдержала, по крайней мере, одно испытание,
в котором те потерпели неудачу.

А. ДЖ. АЙЕР (1910–1989)

Еще на заре истории люди создавали карты, чтобы определить местоположение, измерять расстояния, планировать путешествия и вообще искать свою дорогу на этой земле. Шкиперы кораблей использовали карты для навигации и исследования мира.

Искусство составления карт требует, помимо прочего, точности изображения, что, в свою очередь, часто связано с использованием различных красок, чтобы сделать разные области карты визуально различимыми. Именно из раскрашивания карт, области которых должны различаться, фактически и появилась в середине XIX века одна из величайших головоломок всех времен. Еще в античные вре-

мена составители карт заметили, что для раскрашивания любой карты так, чтобы соседние (соприкасающиеся) области имели разные цвета, достаточно, по-видимому, четырех красок. Например, следующие восемь штатов, соседствующих друг с другом, как показано на рисунке, можно раскрасить так, чтобы они различались, с помощью всего четырех цветов: (1) один цвет для Иллинойса, Теннесси и Вирджинии, (2) второй цвет для Миссури и Огайо, (3) третий для Индианы и Западной Вирджинии и (4) четвертый для Кентукки. Таким образом, никакие два граничащих штата не окрашены в один и тот же цвет:



В 1852 г. молодой математик из университетского колледжа Лондона по имени Френсис Гурти (1831—1899) во время раскрашивания карт понял, что четырех красок, по-видимому, достаточно, для окраски любой карты так, чтобы соседствующие области (то есть области, имеющие общий участок границы, а не только одну общую точку) были окрашены разными цветами. Не сумев найти способ доказательства этого факта, он обратился к своему брату Фредерику с вопросом, не знает ли он какого-либо принципа или теоремы, позволяющих это доказать. Фредерик переадресовал вопрос своего брата знаменитому математику Огастесу де Моргану (1806—1871), который, не имея сведений о существовании какого-либо доказательства, тут же понял, какие последствия для математики содержит вопрос Гурти. Слух о проблеме быстро распространился. Так родилась задача четырех красок.

Эта задача не является головоломкой в традиционном смысле, поскольку первоначально возникла из наблюдений картографов. Тем не менее она имеет все структурные черты подлинной головоломки. Чтобы ее решить, потребовалось в большой мере использовать мышление посредством озарения. Однако ее доказательство, по-видимому, выполненное, оставляет математикам много оснований для беспокойства. Доказательство «Теоремы о четырех красках» настолько непохоже на традиционные доказательства, что на деле породило дискуссию об основаниях математического метода. По этим причинам задача четырех красок принадлежит к списку десяти главных головоломок всех времен.

Головоломка

Хотя имеется свидетельство того, что Август Мёбиус (с которым мы встречались в предыдущей главе) обсуждал задачу четырех красок в лекции для своих студентов, прочитанной в 1940 г., вариант Гурти, заинтересовавший Моргана, сделал эту задачу знаменитой. В простейшей форме задача четырех красок звучит следующим образом:

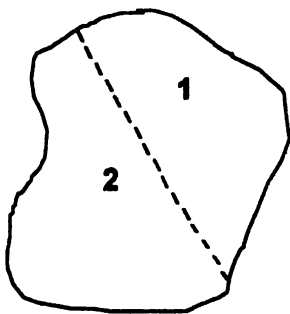
Каково минимальное число красок, необходимое для того, чтобы раскрасить области карты так, чтобы их можно было различить? (Если две области соприкасаются в одной точке, эта точка не считается общей границей.)

Возможно, для большей ясности будет полезно привести несколько иную формулировку той же самой задачи:

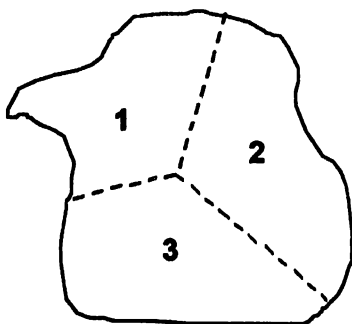
Каково наименьшее возможное число цветов, необходимое для заполнения произвольной карты так, чтобы соседние страны всегда были разного цвета?

Чтобы обсудить ее суть и проблемы, которые она ставит, полезно начать с рассмотрения частных случаев. На карте 1 присутствуют две соприкасающихся области (то есть области имеющие общую границу); а на карте 2 присутствуют три соприкасающихся области. На первой карте, чтобы области различались, нужны два цвета, а на второй для этого потребуются три. Разные числа на картах обозначают разные цвета:

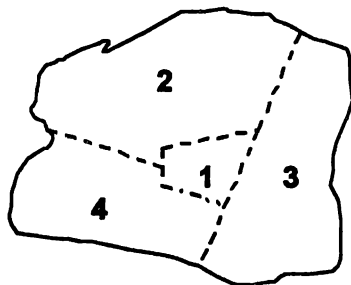
1.



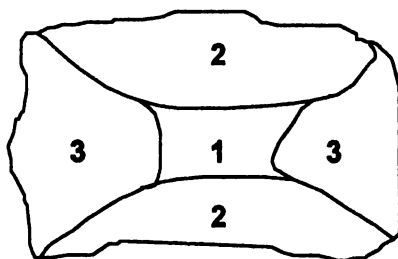
2.



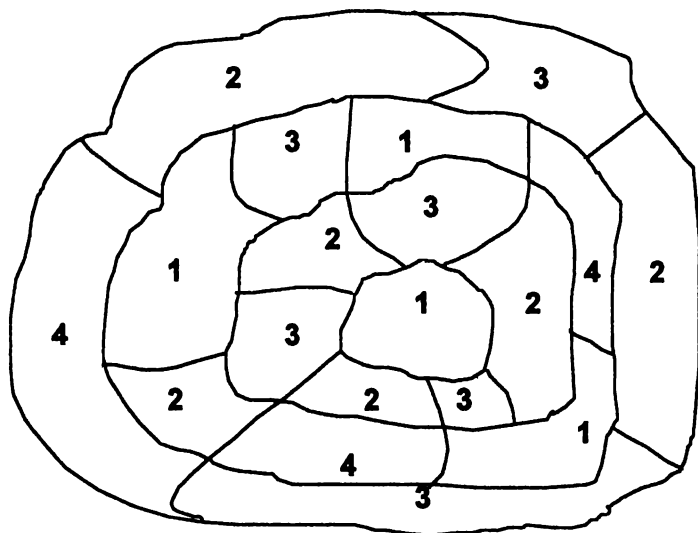
На следующей карте имеются четыре области. Каждая область имеет общую границу с каждой из трех других: 1 граничит с 2, 3 и 4; 2 граничит с 1, 3 и 4; 3 граничит с 1, 2 и 4; 4 граничит с 1, 2 и 3. Как показано на рисунке, четырех цветов (1, 2, 3, 4) будет достаточно для того, чтобы гарантировать, что любые две граничащие между собой области не имеют одного и того же цвета.



Следующая карта содержит пять соприкасающихся областей. Сколько цветов потребуется для этого случая, чтобы гарантировать, что никакие две граничащие между собой области не имеют одного и того же цвета? Как можно видеть, для этого хватит трех цветов (1, 2, 3):



Наконец, следующая карта содержит девятнадцать областей. Как можно видеть, четырех цветов (1, 2, 3, 4) снова достаточно для того, чтобы раскрасить карту так, что области будут различимы.



Можно вообразить, что по мере все большего усложнения карт, увеличения числа областей в них, потребуется и возрастающее число цветов для того, чтобы различать эти области. Но пример с де-

вятнадцатью областями позволяет выдвинуть предположение, что четыре цвета, по-видимому, вполне могут справиться с этой задачей. Проблема заключается в том, чтобы доказать как раз это предположение, а именно, что четырех цветов *достаточно* для раскрашивания любой карты, независимо от того, сколько областей она содержит.

После того как предположение Моргана о четырех цветах стало широко известно, математики предприняли нешуточные попытки доказать его с помощью традиционных евклидовских методов. Но усилия эти неизменно оказывались бесплодными.

ЕВКЛИД (приблизительно 330–270 до Р.Х.)

Среди тех, кто первым утвердил математику как теоретическую дисциплину, основанную на методах доказательства, был греческий математик Евклид. Евклид начал с общепринятых или очевидных истин, которые называются **аксиомами** (например, две прямых линии пересекаются только в одной точке, а не в двух и более точках) и **постулатами** (утверждениями, принимаемыми без доказательства). Из них он выводил теоремы.

Место и время рождения Евклида не установлены. Известно, что он учил математике в храме муз – Мусейоне, находившемся в египетском городе Александрия. Евклид, возможно, учился в Афинах и прибыл в Александрию в 300 г. до Р.Х. по приглашению правителя Египта Птолемея. Рассказывают, что когда Птолемей спросил его, существует ли более короткий путь изучения геометрии, чем «Начала» Евклида, ученый иронически ответил: «К геометрии нет царского пути».

Мы встретились с двумя из этих методов в главе 1, когда доказали, что противоположные углы, образованные двумя пересекающимися прямыми, равны, и когда показали, что сумма углов многоугольника равна $(n - 2) 180^\circ$. Методы эти были введены в общую практику великим греческим математиком Евклидом. С тех пор они стали признаны в качестве единственно пригодных и авторитетных методов доказательства новых теорем. Между прочим, Евклид заканчивал каждое доказательство фразой «Что и доказывает то, что мы намеревались продемонстрировать», фразой, превращенной в римские времена в аббревиатуру QED от *Quod erat demonstrandum*

(«Что и требовалось доказать»). Эта аббревиатура стала печатью авторитетности в математике и остается таковой и по сей день.

Когда задача о четырех красках была поставлена, математики полагали, что ее можно решить стандартными «евклидовскими» методами. Такие выдающиеся математики, как Морган, Артур Кэли (1821–1895), Артур Брей Кемпе (1849–1922), Дейвид Биркгоф (1844–1944), Перси Джон Хивуд (1861–1955) и Филип Франклин (1898–1965), все приложили руку к решению этой задачи. Шли годы, но подходящее доказательство оставалось неуловимым.

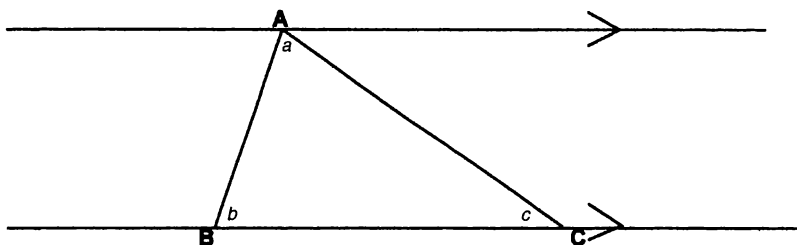
Затем, откуда ни возьмись, в 1976 г. два известных математика из университета штата Иллинойс, Хакен (1928–) и Кеннет Аппель (1932–) объявили, что они «решили» задачу четырех красок, но не каким-либо из традиционных евклидовских методов доказательства, а, увы, с помощью компьютерной программы, которая, как они утверждали, могла «протестировать» любую карту и решить, выполняется ли предположение о четырех красках. Пока что эта программа не нашла ни одной карты, такой, что для ее раскраски потребовалось бы больше четырех цветов. Хакен и Аппель написали компьютерную программу, которая исчерпывающим образом доказывала гипотезу о четырех красках для критического подмножества карт, что, в свою очередь, позволило распространить утверждение о справедливости этой гипотезы на все карты. Однако многие математики испытывают дискомфорт от «доказательства» Хакена–Аппеля. Если бы все как один признали его авторитетным, это поистине изменило бы лицо математики. Вероятно, именно поэтому споры вокруг него продолжаются по сей день.

Математические комментарии

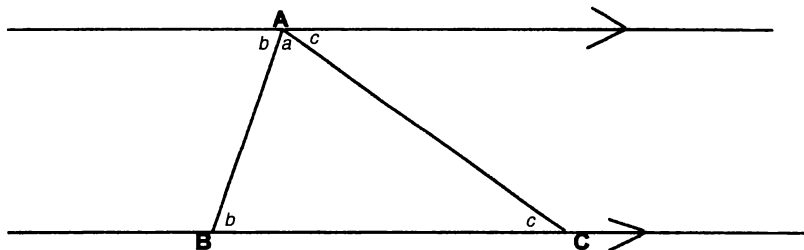
Детали программы Хакена–Аппеля и математические принципы, на которых она основана, чересчур сложны для того, чтобы можно было обсуждать их здесь. Читатель, интересующийся ими, может обратиться к другим источникам, в частности, к детальному и доступному объяснению программы, а также математических принципов, необходимых для ее понимания, данному в книге Робина Вилсона *Four Color Suffice*. Что уместно обсудить здесь, так это природу евклидовского метода и то, почему задача четырех красок произвела такое фундаментальное воздействие на математику.

Евклидов метод

Доказательство посредством дедукции всегда считалось выражающим суть математического метода благодаря его особой способности демонстрировать, что некоторое соотношение или наблюдаемое свойство выполняются в **общем случае**, что аргумент или линия рассуждений относятся к категории в целом или к каждому представителю класса или категории — ко всем точкам, ко всем углам, ко всем числам, и так далее. Например, если бы вы измеряли углы в треугольниках разного вида с помощью транспортира, вы вскоре начали бы подозревать, что сумма углов всегда равна 180 градусам. Но вы не могли бы быть уверены, что в абсолютно каждом треугольнике сумма углов будет равна 180 градусам. Доказательство посредством дедукции позволяет вам установить этот факт без всяких исключений. И вот каким образом. Нарисуем треугольник ABC и пометим его углы буквами a , b , c . Продолжим его основание в обе стороны и проведем через противоположную вершину прямую, параллельную основанию. Параллельные друг другу линии на рисунке помечены стрелками. Заметим, что ABC представляет произвольный треугольник. Вы можете изменить его любым способом, каким пожелаете (можете сделать его **тупоугольным**, прямоугольным, увеличить, уменьшить, и так далее), но следующие далее рассуждения останутся правильными.



Ранее доказанная геометрическая теорема утверждает, что если прямая линия пересекает две параллельных прямых, то углы с разными параллельными прямыми на противоположных сторонах этой линии (называемой **трансверсалью**) равны. На нашем рисунке есть две трансверсали: AB и AC . Равные углы, которые они порождают, это угол, противоположный b , и угол, противоположный c . Отметим их на рисунке:



Теперь заметим, что углы a , b , c , прилежающие к вершине A , являются компонентами угла 180° . Поэтому $a + b + c = 180^\circ$. Заметим, что три угла в треугольнике тоже являются углами a , b и c . Таким образом мы установили, что $a + b + c = 180^\circ$, и можем сделать заключение, что сумма углов треугольника равна 180 градусам: так как a , b и c могут иметь любые значения (конечно, меньше 180°), и так как выбранному треугольнику не приписываются какие-либо специальные размеры, это доказательство справедливо при всех условиях. Таким образом, мы без всяких сомнений установили, что сумма углов в *любом* треугольнике всегда равна 180 градусам — QED.

Уже греки, несомненно, осознавали, что не все теоремы в математике могут быть доказаны дедуктивным методом. В качестве дополнительного способа доказательства издавна употреблялся другой метод, называемый **reductio ad absurdum** (буквально: сведение к абсурду). Он устанавливает истинность утверждения, показывая, что его отрицание либо ложно, либо приводит к противоречию.

На самом деле, метод на этот раз был введен в логику не Евклидом, а Зеноном Элейским, с которым мы еще встретимся в главе 8. Однако Евклид изобретательно использовал этот метод для доказательства различных теорем, таких как теорема, доказывающая, что множество простых чисел бесконечно. Как мы уже видели в главе 3, целые числа подразделяются на простые и составные. Первые не имеют делителей, кроме единицы и самих себя, последние имеют делители. Числа 12, 42, 169, например, являются составными. Они состоят из множителей:

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$42 = 7 \times 2 \times 3$$

$$169 = 13 \times 13$$

Все составные числа могут быть выражены подобным способом в виде произведений простых сомножителей. Простой множитель в составном числе будет делиться, таким образом, только на самого себя.

Первые десять простых чисел таковы: {2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 23}. Даже беглый взгляд на множество всех чисел {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...} обнаруживает, что по мере возрастания значений простых чисел становится все меньше и меньше. Поэтому логически допустимо предположить, что в некотором месте простые числа должны закончиться. Евклид доказал, что это не так.

Он начал с предположения, что простые числа действительно могут прийти к концу. Это означает, что существует наибольшее простое число. Он обозначил это число p_n :

$$\text{Полное множество простых чисел} = \{2, 3, 5, 7, \dots, p_n\}.$$

Затем Евклид задался вопросом: какого вида число получится, если перемножить все простые числа?

$$\{2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p_n\} = ?$$

Согласно определению, это число, разумеется, является составным, и его сомножителями являются все простые числа. Любое из них будет его делителем. Этот результат тривиален. Поэтому, чтобы получить что-то более интересное, Евклид прибавил к полученному произведению число 1:

$$\{2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p_n\} + 1 = ?$$

И эта ничтожная единица дала Евклиду все, что было нужно, чтобы отвергнуть идею о наибольшем простом числе. Почему? Для числа, получаемого из последнего выражения, имеются две возможности: оно либо простое, либо составное. Предположим, что это число является простым (и обозначим его P):

$$\{2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p_n\} + 1 = P \text{ (простое число).}$$

Число P , очевидно, больше, чем любое из чисел $\{2, 3, 5, \dots, p_n\}$, поскольку оно получено перемножением их всех. Это «новое» простое число, и оно много больше чем p_n , которое поэтому, как оказывается, уже не является наибольшим простым числом, как предполагалось первоначально.

Вторым возможным предположением, как уже говорилось, является то, что это выражение дает составное число (обозначим его C):

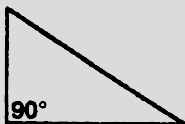
$$\{2 \times 3 \times 5 \times \dots \times p_n\} + 1 = C \text{ (составное число).}$$

Будучи составным числом, C состоит из множителей, на которые оно делится. Но ни одно из имеющихся в наличии простых чисел $\{2, 3, 5, \dots, p_n\}$ не является его делителем, поскольку, если мы возьмем одно из этих чисел и разделим на него C , то досадная 1 будет всегда оставаться в остатке. Итак, C должно быть простым числом, которого нет в нашем множестве. Это опять «новое» простое число, большее, чем любое число из множества. И на этот раз снова оно оказывается больше, чем p_n , и число, которое мы считали наибольшим из простых чисел, теперь наибольшим не является. Таким способом Евклид доказал, что простые числа не заканчиваются. Он сделал это, показав, что предположение о существовании наибольшего простого числа приводит к «абсурду».

Люди, решавшие задачу четырех красок, сначала также предполагали, что ее возможно решить, действуя в согласии с такими традиционными методами доказательства. Но все усилия сделать это оказывались тщетными. Доказательство Хакена и Аппеля является необычным, поскольку оно ломает эту традицию. Компьютерная программа, написанная Хакеном и Аппелем, по существу проверяет, требуется ли для раскрашивания карты более четырех цветов. Она убедила многих математиков в том, что теорема о четырех красках окончательно доказана, и что ее доказательство составляет важное и радикальное нововведение в математические методы. Однако, насколько мне стало ясно при изучении текущего состояния дел, принятие компьютерной программы Хакена и Аппеля в качестве «доказательства» продолжает оставаться чрезвычайно нелегким делом, потому что технически оно на самом деле доказательством не является.

ТРЕУГОЛЬНИКИ

Прямоугольный треугольник является треугольником, у которого один из углов составляет 90° :

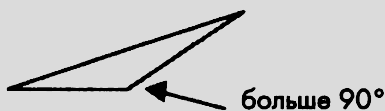


(продолжение)

Остроугольным треугольником называется треугольник, все углы которого меньше 90° :



Тупоугольным треугольником называется треугольник, один из углов которого больше 90° :

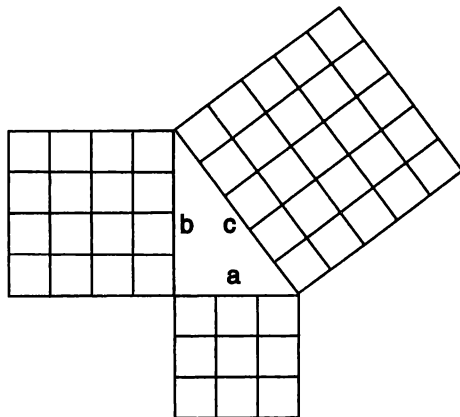


Доказательство

Среди первых, кто использовал доказательство как способ продемонстрировать, что нечто является верным всегда, был Пифагор (глава 2), который доказал, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, по площади равен сумме площадей квадратов, построенных на других его сторонах, или в символической форме:

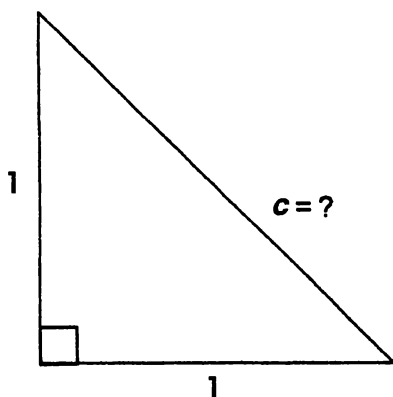
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Следующий рисунок показывает это соотношение в визуальной форме:



Это соотношение было известно во многих культурах Древнего мира. История сообщает, однако, что Пифагор, вероятно, был первым, кто доказал, что оно справедливо для всех прямоугольных треугольников, хотя он и не оставил этого доказательства в записанном виде.

Трудно сказать, была ли теорема Пифагора, как стали ее называть, тем критическим событием, которое утвердило математический метод в технике доказательств, в технике, из которой возникали озарения и результаты, делавшие возможным доказательства других теорем. Иногда эти результаты даже приводили к неожиданным открытиям. Пифагорейцы сами заметили, что их собственная теорема, примененная к равнобедренному прямоугольному треугольнику с двумя сторонами единичной длины (длины, равной 1), дает для выражения длины гипотенузы странное число:



$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2.$$

Поэтому

$$c^2 = 2.$$

Таким образом

$$c = \sqrt{2}.$$

Как оказалось, число $\sqrt{2}$ не может быть записано в виде дроби или *отношения*. Оно является бесконечной десятичной дробью (1,4142136...). По этой причине оно называется *иррациональным*.

Пифагорейцы были весьма разочарованы непреднамеренным открытием иррациональных чисел, поскольку они не согласовывались с философией, в которую они верили. С другой стороны, Евклид рассматривал иррациональные числа как вполне законные. Но для того, чтобы включить их в растущую энциклопедию математических знаний своего времени, ему пришлось доказать, что они и в самом деле отличаются от рациональных чисел. Для этого он использовал вид доказательства, который отличался как от дедуктивного доказательства, так и от сведения к абсурду. Он называется доказательством от противного.

4n²

Как мы видели в предыдущей главе, четное число представимо формулой $2n$. Это означает, что если мы возьмем любое число $(1, 2, 3, \dots)$ и умножим его на 2, мы всегда получим четное число.

Выражение $2q^2$ также представляет четное число. В этом случае n в выражении $2n$ заменяется на q^2 .

Возводя $2n$ в квадрат, мы получаем $4n^2$: $(2n)(2n) = 4n^2$.

Выражение $4n^2$ является четным числом, поскольку $2n$ является его делителем. Это доказывает, что возведение в квадрат любого четного числа дает результат, который сам является четным числом.

Упрощение дроби

Некоторые дроби можно упростить (или сократить): например, $\frac{5}{10}$ можно сократить до $\frac{1}{2}$, так как 5 является делителем и числителя и знаменателя. Подобным же образом $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, поскольку 2 является делителем и числителя и знаменателя. Конечно, некоторые дроби, такие как $\frac{2}{3}$, нельзя упростить, так как в числителе и знаменателе нет общего множителя, на который их можно сократить. Когда дробь нельзя больше сократить, говорят, что она имеет простейшую форму.

Евклид начал с замечания, что общая форма рационального числа имеет вид p/q . **Целое число** определяется как член множества, полученного расширением множества натуральных чисел $(1, 2, 3, \dots)$ на отрицательные значения $(-1, -2, -3, \dots)$ и ноль. Для случая целых чисел знаменатель q всегда равен 1, например 4 и в самом деле равно $\frac{4}{1}$. Заметим, что q не может быть равным 0. Деление на 0 не

определено. Причину этого мы обсудим в главе 8. Евклид просто доказал, что $\sqrt{2}$ не может быть записан в виде p/q . Он проделал это, предположив, что $\sqrt{2}$ можно представить в таком виде, и показав, что это предположение приводит к противоречию.

Для того чтобы избавиться от квадратного корня, Евклид сначала возвел в квадрат обе части предполагаемого равенства:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= p/q \\ (\sqrt{2})^2 &= p^2/q^2.\end{aligned}$$

Поэтому

$$2 = p^2/q^2.$$

Затем он умножил обе части этого равенства на q^2 , избавившись тем самым от обременительного знаменателя в правой части равенства:

$$2q^2 = p^2.$$

Очевидно, что p^2 является четным, так как оно равно $2q^2$, что соответствует форме четного числа. Отсюда можно заключить, что и само p является четным. Теперь, если p четно, его можно переписать с помощью общей формулы для четных чисел, а именно, $p = 2n$, и подставить в предыдущее равенство:

$$2q^2 = p^2$$

и, так как $p = 2n$:

$$2q^2 = (2n)(2n) = 4n^2.$$

Поэтому

$$2q^2 = 4n^2.$$

Теперь это равенство можно упростить, разделив обе части на 2:

$$q^2 = 2n^2.$$

Последнее равенство показывает, что q^2 четное число, и поэтому q тоже четное число и может быть представлено как $2m$. Далее Евклид вернулся к первоначальному предположению, а именно, что рациональное число:

$$\sqrt{2} = p/q.$$

В это равенство он подставил те выражения, которые мы только что получили, а именно, $p = 2n$ и $q = 2m$:

$$\sqrt{2} = 2n/2m.$$

Дробь (числовое выражение, указывающее на отношение двух величин и выражаемое в общей форме как p/q) в правой части можно упростить до n/m (поскольку и числитель и знаменатель можно разделить на их общий множитель 2):

$$\sqrt{2} = n/m.$$

Теперь проблема состоит в том, что мы оказались в том самом месте, с которого начинали. Мы закончили тем, что просто заменили p/q на n/m . Очевидно, можно было бы продолжать идти этим путем, всегда получая дроби с другими числителями и знаменателями (a/b , x/y , ...), и так до бесконечности. Но дроби невозможно сокращать бесконечно. Таким образом, мы пришли к противоречию. Что привело к нему? Тот факт, что мы предположили возможность выразить $\sqrt{2}$ в форме p/q . Очевидно, что это невозможно. Так, с помощью приведения к противоречию, Евклид доказал, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА*

Дедукция. Метод показывает, что нечто с необходимостью следует из набора предположений.

Сведение к абсурду. Метод опровергает исходное предположение, показывая абсурдность его неизбежного следствия.

Приведение к противоречию. Метод показывает, что исходное предположение ведет к противоречию, и поэтому его следует отвергнуть.*

Индукция. Метод показывает, что утверждение является истинным, если при его справедливости для n -го случая его удастся доказать для случая $(n + 1)$.

* В отечественной математической литературе метод сведения к абсурду и метод приведения к противоречию не различают (видимо, справедливо полагая, что абсурд есть частный случай противоречия) и называют оба метода *доказательством от противного*. (Примеч. пер.)

Чтобы завершить обсуждение доказательства, следует упомянуть четвертый его тип, принимаемый математиками, поскольку он особенно уместен при обсуждении доказательства Хакена—Аппеля для теоремы четырех красок. Он называется доказательством по индукции.

Чтобы понять, как работает этот метод, вернемся к формуле суммы (обозначаемой ниже символом Sum) арифметической прогрессии, которую мы обсуждали в главе 3:

$$\text{Sum}_{(n)} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Как можно доказать эту формулу? Начнем с демонстрации того, что эта формула справедлива для случая с номером 1, то есть для $n = 1$:

$$\text{Sum}_{(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Sum}_{(1)} = \frac{1 \times (1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1.$$

Это показывает, что формула верна для случая с номером 1, поскольку сумма ряда, содержащего лишь 1, равна 1. Следующим шагом будет демонстрация того, что эта формула применима к ряду, имеющему на один член больше, чем последний, для которого она доказана. Поскольку последний ряд имеет n членов, следующий имеет $(n + 1)$. Обозначим сумму этого ряда символом $\text{Sum}_{(n+1)}$. Сумму $(n + 1)$ членов можно получить простым прибавлением дополнительного члена $(n + 1)$ к $\text{Sum}_{(n)}$:

$$\text{Sum}_{(n+1)} = \text{Sum}_{(n)} + (n + 1).$$

Поскольку

$$\text{Sum}_{(n)} = \frac{n(n+1)}{2},$$

то

$$\text{Sum}_{(n+1)} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)}{1}.$$

Это выражение можно переписать как

$$\text{Sum}_{(n+1)} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}.$$

Форма этого выражения идентична форме выражения для $\text{Sum}_{(n)}$. Почему? Потому что каждое появление n в $\text{Sum}_{(n)}$ сменилось проявлением $(n + 1)$ в $\text{Sum}_{(n+1)}$, как читатель может проверить самостоятельно. Другими словами, мы просто показали, что эта формула верна и для $(n + 1)$. Поскольку мы можем выбрать n сколь угодно большим, мы на самом деле показали, что эта формула справедлива для ряда любой длины. Почему? Потому что мы можем использовать формулу для суммирования ряда не только для ряда, содержащего на один член больше, чем n , но и для ряда, содержащего еще на один член больше, и так далее, до бесконечности. Доказательство по индукции можно сравнить с эффектом домино, когда достаточно свалить первую костяшку для того, чтобы поставленные в ряд другие костяшки последовательно опрокинулись все до одной.

Вернемся теперь к доказательству Хакена—Аппеля для теоремы о четырех красках. Их программа, по сути, проверяет, требуется ли для раскрашивания карты более четырех цветов. Таким образом, это «доказательство» не является настоящим доказательством в традиционном смысле этого слова. Оно является множеством инструкций для компьютера. Как мы можем быть уверены, что инструкции, написанные Хакеном и Аппелем, приложимы ко всему бесконечному множеству карт? Выражаясь математически более традиционно, как мы можем быть уверены, что их «доказательство» создает эффект домино в том же смысле, в котором создает его доказательство по индукции?

С моей точки зрения, задача четырех красок остается подлинной головоломкой для многих (может быть, для большинства) математиков. Ее решение в традиционных математических терминах, возможно, еще ожидает своего часа, и то что пока не появилось на свет, еще породит восклицание «Ага!» в момент озарения. Первоначально и теорема Пифагора существовала как предположение, как нечто, что выполняется для частных случаев, и для чего не удалось обнаружить исключений. Она стала истинной теоремой в тот момент, когда было показано, что она выполняется в общем случае. Задача о четырех красках будет, вероятно, беспокоить многих математиков до тех пор, пока не будет найдено простое доказательство для общего случая. Однако, как удачно выразился на своей лекции в Гарварде, прочитанной в 1860-х, великий американский философ Чарльз С. Пирс (1839–1914), тоже замороженный этой задачей, она приводит в бешенство потому, что выглядит так просто решаемой, но еще ни один математик не нашел ее доказательства в рамках традиционных методов логики и математики.

Заключительные замечания

Задача о четырех красках поистине открыла в математических кругах «ящик Пандоры». Если признать, что доказательство Хакена—Аппеля является доказательством, это создает подлинное нововведение в методах математики. Однако поскольку их доказательство нельзя проверить тем же способом, которым традиционно проверяются доказательства, многие математики испытывают в этой связи дискомфорт. Оно, безусловно, не соответствует греческому идеалу бесспорного, абсолютного доказательства. Самое большее, что можно о нем сказать, это что оно, по-видимому, верно, как говорят о физических теориях.

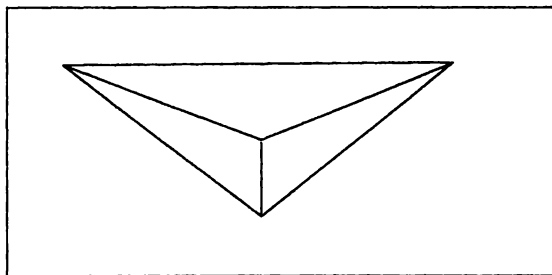
Возможно, в один прекрасный день кого-нибудь осенит откровение, ведущее к ускользающему простому решению, на сохраняющуюся возможность появления которого указывал Пирс. Как признавали сами Хакен и Аппель: «Нельзя отвергнуть возможность того, что в один прекрасный день некий пресловутый блистательный студент высшей школы найдет короткое доказательство теоремы о четырех красках». На мой взгляд, многие математики все еще ожидают, что этот студент наконец сделает свой решительный шаг!

Упражнения

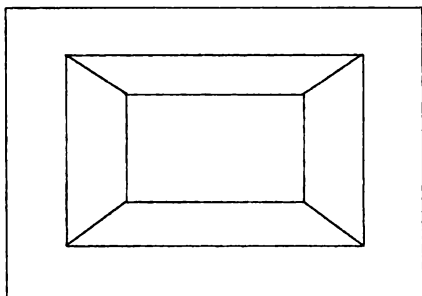
Задачи раскрашивания

42. Каково наименьшее число цветов, необходимых для того, чтобы раскрасить каждую из следующих карт? Любые две соседние области должны быть окрашены в разные цвета.

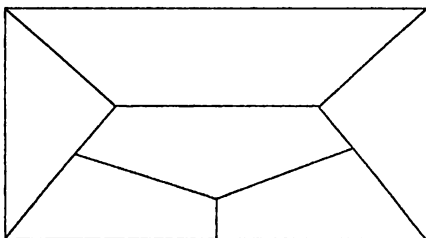
А.



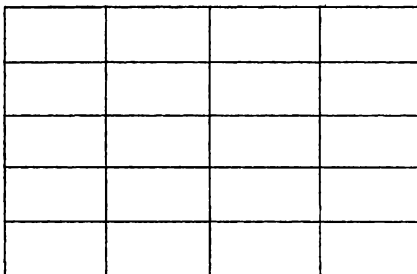
B.



C.



D.



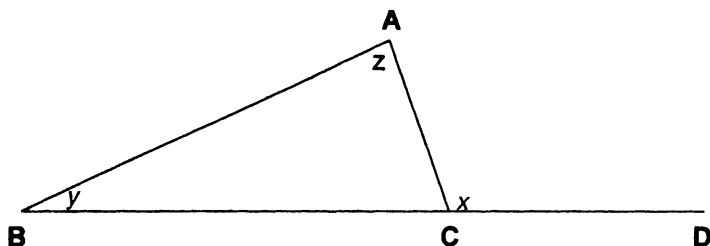
43. Каково наименьшее число цветов, необходимых для того, чтобы раскрасить ленту Мёбиуса и бутылку Кляйна (глава 4)?

Доказательство

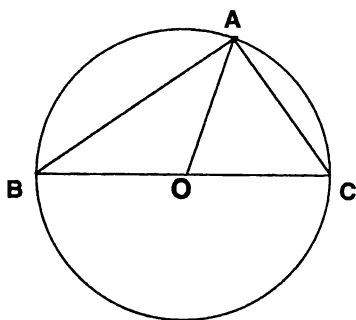
44. Докажите методом приведения к противоречию, что если один из углов треугольника больше 90° , то каждый из двух других углов должен быть меньше 90° .

45. Докажите, что куб является сетью, к которой применима формула $v - e + f = 2$ трехмерных графов (глава 4).

46. Докажите, что внешний угол треугольника, угол x , на следующем рисунке, равен сумме противоположных ему внутренних углов y и z .



47. Сколько цветов необходимо, чтобы раскрасить следующую фигуру? Можно ли доказать полученный результат, не раскрашивая ее?





Головоломка Люка «Ханойские башни»

И нет острия более острого,
чем острие Бесконечности.

ШАРЛЬ БОДЛЕР (1821–1867)

Игры, в которые следует играть по правилам с использованием инвентаря, такого как доски, фишки, палочки, камешки, монеты и тому подобное, с незапамятных времен заинтриговывали и развлекали людей всех возрастов. Существует множество спекуляций на тему того, почему они когда-то впервые возникли. Но на вопрос о том, каково их назначение, так никогда и не появилось удовлетворительного ответа.

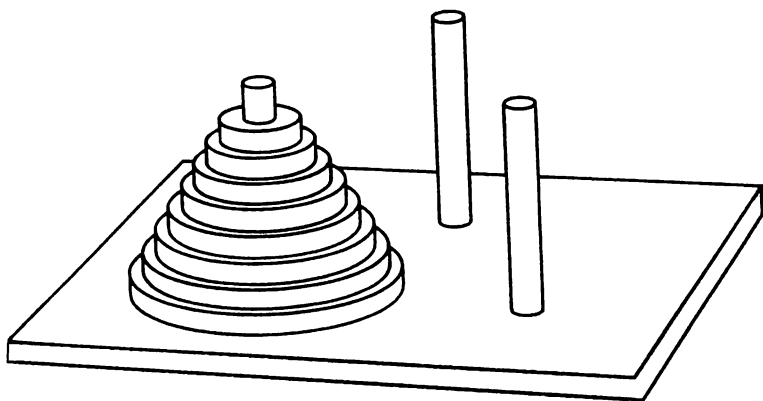
Математики тоже всегда были заинтригованы играми, поскольку многие из них могут быть построены на основе математических принципов и служат поэтому «проверочным инструментом» для моделирования самих этих принципов. Одной из самых знаменитых и притягательных из всех таких математически сконструированных игр является игра, известная как головоломка «Ханойские башни». Ее предложил в 1883 г. в качестве игры для детей французский математик Франсуа Эдуар Анатоль Люка, с которым мы встречались в главе 3, хотя схематически ее идея с незапамятных времен встречается в разных культурах по всему миру. Эта голово-

ФРАНСУА АНАТОЛЬ ЛЮКА (1842–1891)

Люка получил образование в Эколи Нормаль в Амьене. Во время франко-прусской войны (1870–1871) он нес службу как офицер артиллерии. После войны был приглашен для преподавания математики в лицей Сен-Луи в Париже. Позднее Люка преподавал в лицее Шарлемань, также в Париже. Он умер в результате нелепой случайности, приключившейся во время банкета, когда осколок разбившейся тарелки врезался ему в щеку и вызвал летальное заражение крови.

Более всего Люка известен своими работами по теории чисел. Как мы видели в главе 3, он изучал последовательность Фибоначчи и ее следствия для математики.

ломка, по существу, представляет собой «игрушечную модель» понятия геометрической прогрессии. Ее простота и оригинальность, а также тот факт, что она по сей день продолжает привлекать нас к себе, выдвигают ее в число десяти величайших головоломок всех времен. Даже теперь упрощенный вариант этой головоломки можно повсеместно обнаружить в магазинах игрушек:



Прежде чем обратиться непосредственно к головоломке, полезно будет вкратце освежить понятие ряда. Как мы указали в главе 3, ряд определяется в математике как упорядоченная последовательность чисел:

1. $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots\}$
2. $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots\}$

В ряду 1, известном как арифметическая прогрессия, каждый член получается из предшествующего прибавлением 2. Давайте обобщим конструкцию этого ряда. Если мы обозначим буквой a начальный член ряда и буквой d — постоянную разности двух следующих друг за другом членов, то сможем записать общую форму арифметической прогрессии в следующем виде:

$$\{a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \dots, a + (n - 1)d\}.$$

В ряду 1 у нас $a = 2$ и $d = 2$. Подставляя эти значения в общую форму для члена ряда, получим правильные члены нашей прогрессии:

Первый член	Второй член	Третий член	Четвертый член	...
↓	↓	↓	↓	
a	$a + d$	$a + 2d$	$a + 3d$...
↓	↓	↓	↓	
2	$2 + 2 = 4$	$2 + (2 \times 2) = 6$	$2 + (3 \times 2) = 8$...

Выражение $a + (n - 1)d$ указывает на то, что каждый член арифметической прогрессии строится путем прибавления к начальному члену a разностного члена $(n - 1)d$, где n — порядковый номер (1-й, 2-й, 3-й, ...) члена ряда:

ТАБЛИЦА 6-1: ОБЩИЙ ЧЛЕН АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Член	Форма	Метод построения
1-й	a	$a + (1 - 1)d = a + (0)d = a$
2-й	$a + d$	$a + (2 - 1)d = a + (1)d = a + d$
3-й	$a + 2d$	$a + (3 - 1)d = a + (2)d = a + 2d$
4-й	$a + 3d$	$a + (4 - 1)d = a + (3)d = a + 3d$
...
n -й	$a + (n - 1)d$	$a + (n - 1)d$

В ряду 2, известном как геометрическая прогрессия, каждый член получается из предшествующего умножением на 2. Давайте обобщим структуру рядов этого типа тоже. Если мы воспользуемся буквой a для обозначения начального члена ряда и буквой r для обозначения отношения двух следующих друг за другом членов, то сможем записать общую форму геометрической прогрессии в следующем виде:

$$\{a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots, ar^{n-1}\}.$$

В ряду 2 у нас $a = 2$ и $r = 2$. Подставляя эти значения в общую формулу для члена ряда, получим правильные члены ряда 2:

Первый член	Второй член	Третий член	Четвертый член	...
↓	↓	↓	↓	...
a	ar	ar^2	ar^3	...
↓	↓	↓	↓	...
2	$2 \times 2 = 4$	$2 \times 2^2 = 8$	$2 \times 2^3 = 16$...

Выражение ar^n представляет общий член геометрической прогрессии. Оно указывает на то, что каждый член этого ряда строится путем умножения начального члена a на r^n , где n — порядковый номер (1-й, 2-й, 3-й, ...) члена ряда:

ТАБЛИЦА 6-2: ОБЩИЙ ЧЛЕН ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Член	Форма	Метод построения
1-й	a	$ar^{1-1} = ar^0 = a$
2-й	ar	$ar^{2-1} = ar^1 = ar$
3-й	ar^2	$ar^{3-1} = ar^2$
4-й	ar^3	$ar^{4-1} = ar^3$
...
n -й	ar^{n-1}	ar^{n-1}

Основные идеи предшествующего обсуждения понадобятся нам для понимания природы головоломки Люка.

ПОКАЗАТЕЛИ СТЕПЕНИ

Умножение

Умножение одинаковых чисел с разными показателями степени эквивалентно сложению их показателей, как демонстрируют следующие примеры:

$$3^4 \times 3^5 = 3^9$$

$$7^{12} \times 7^{20} = 7^{32}$$

Почему? Рассмотрим первый пример:

(продолжение)

$$\begin{array}{ccc}
 3^4 & \times & 3^5 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (3 \times 3 \times 3 \times 3) & \times & (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)
 \end{array}$$

Показатели степени на самом деле показывают нам, сколько сомножителей участвует в акте умножения. Сосчитав число сомножителей, мы получим 9, то самое число, которое получается сложением показателей степени ($4 + 5 = 9$).

Поэтому в общем случае

$$a^n \times a^m = a^{n+m}.$$

Деление

Деление одинаковых чисел с разными показателями степени одно на другое эквивалентно вычитанию показателя второго из показателя первого. Например:

$$\begin{aligned}
 3^5 : 3^3 &= 3^{5-3} = 3^2 \\
 7^{15} : 7^5 &= 7^{10}
 \end{aligned}$$

Почему? Рассмотрим первый пример:

$$\frac{3^5 = (3 \times 3 \times 3) \times 3 \times 3}{3^3 = (3 \times 3 \times 3)} .$$

Сокращая множители в скобках, получаем

$$\frac{\cancel{(3 \times 3 \times 3)} \times 3 \times 3}{\cancel{(3 \times 3 \times 3)}} .$$

Остается 3×3 или 3^2 , то есть степень, соответствующая вычитанию одного показателя степени из другого ($5 - 3 = 2$).

Поэтому в общем случае:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

$$n^0 = 1$$

Любое число, возведенное в степень 0 равно 1.

(продолжение)

Почему? Возьмем два одинаковых числа в одной и той же степени и разделим одно на другое: $3^5 : 3^5$.

Из предыдущего примера мы знаем, что $3^5 : 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$.

Но результат деления 3^5 на: 3^5 равен 1:

$$\frac{3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

Поэтому $3^5 : 3^5 = 1$.

А поскольку $3^5 : 3^5 = 3^0$, мы доказали таким образом, что $3^0 = 1$.

В общем случае:

$$n^0 = 1.$$

Головоломка

Как мы уже упоминали, головоломка «Ханойские башни» появилась в 1883 г. Вероятно, Люка натолкнулся на ее идею в похожей задаче, включенной итальянским математиком Джероламо Кардано (1501–1578) в издание *De Subtilitate* 1550 г.:

В монастыре города Ханоя есть золотая доска с тремя вставленными в нее деревянными штырями. На первый из этих штырей нанизаны шестьдесят четыре золотых диска в порядке убывания их диаметра: самый большой диск снизу, самый маленький сверху. Бог приказал обезьянке переместить диски на третий штырь, перекладывая по одному диску за один прием и сохраняя порядок их диаметров. Большой диск никогда не должен лежать на меньшем диске. Можно использовать все три штыря. Когда обезьянка переместит последний диск, мир завершит свое существование.

Мир, возможно, и закончил бы свое существование, поскольку обезьянке пришлось бы совершить $2^{64} - 1$ движений, чтобы выполнить условия поставленного ей задания. Даже если бы она делала

по одному движению в секунду (и при этом ни разу не ошиблась), чтобы завершить поручение, ей потребовалось бы $5,82 \times 10^{11}$ или 582 000 000 000 лет! Прежде чем пояснить это, будет полезно вкратце ознакомиться с понятием показателя степени.

Рассмотрим умножение числа 3 на само себя четырнадцать раз:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3.$$

Такая запись умножения слишком громоздка и потому неудобна для работы. Чтобы сделать умножение более экономичным, математики ввели понятие **показателя степени**. Вышеприведенную операцию умножения можно представить теперь более удобным образом как 3^{14} , где 3 называется **основанием**, а верхний индекс «14» показателем степени или **степенью**. Показатель степени сообщает нам, сколько раз основание умножается на само себя. В общем случае выражение n^m означает, что n умножается на само себя m раз. Например, в выражении 2^8 $n = 2$ и $m = 8$:

$$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2.$$

Заметим, что число в степени 0 равно 1 независимо от его значения:

$$2^0 = 1, 4^0 = 1, 13^0 = 1, \text{ и так далее}$$

(доказательство этого факта смотрите в выноске на с. 124).

Показатели степени особенно полезны для представления членов геометрической прогрессии. Например, в ряду, состоящем из членов, представляющих собой последовательные степени 2, последний член будет иметь вид 2^n :

$$\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n\}.$$

Член, идущий перед 2^n , конечно, имеет вид 2^{n-1} , а член, идущий перед ним — 2^{n-2} :

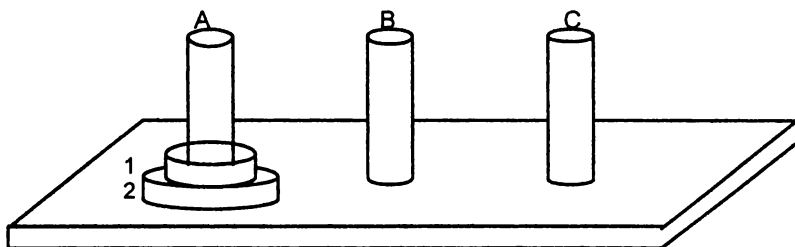
$$\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{n-2}, 2^{n-1}, 2^n\}.$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы заняться головоломкой «Ханойские башни». Начнем с простейшего варианта головоломки, в ко-

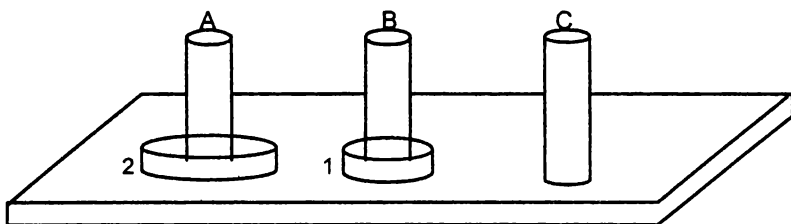
тором необходимо переместить всего два диска, с первого стержня на третий, сохраняя убывающий порядок их диаметров так, чтобы больший диск никогда не оказывался на меньшем диске. Чтобы отслеживать акты перемещений, полезно пронумеровать диски:

1 = меньший диск

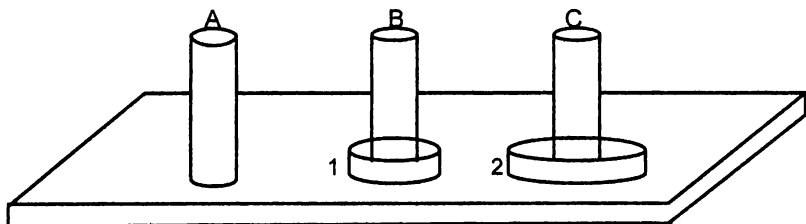
2 = больший диск



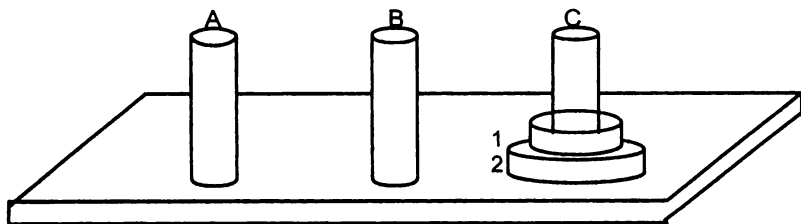
Начнем с перемещения диска 1 на стержень B:



Теперь мы можем переместить диск 2 с A на C:

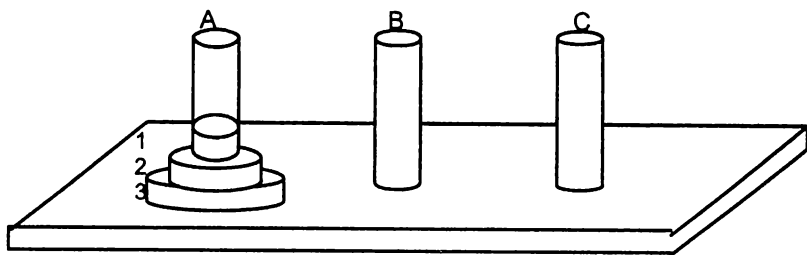


Наконец, переместим диск 1 на стержень C поверх диска 2. Теперь оба диска перемещены на стержень C, и меньший, как и требуется, находится сверху:



Чтобы завершить задачу, потребовалось три перемещения. Заметим, что этот результат можно представить в виде $2^2 - 1$, так как $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$. Отметим также, что показатель степени «2» в $2^2 - 1$ соответствует числу дисков, участвующих в игре.

Рассмотрим теперь вариант игры с тремя дисками. Начнем с присвоения дискам номеров 1, 2 и 3:



Перемещения (которые мы не сопровождаем рисунками), необходимые для решения, мы перечисляем ниже. Читатель, которому трудно зрительно вообразить каждое перемещение, может сделать физическую модель этой игры и воспроизводить на ней все перемещения. Можно также использовать имеющиеся в продаже игрушечные варианты этой головоломки.

1. Перемещаем диск 1 с А на С.
2. Перемещаем диск 2 с А на В.
3. Перемещаем диск 1 с С на В поверх диска 2.
4. Перемещаем диск 3 с А на С (который теперь свободен).
5. Перемещаем диск 1 с В на А (который теперь свободен).
6. Перемещаем диск 2 с В на С поверх диска 3.
7. Перемещаем диск 1 с А на С поверх диска 2, лежащего, в свою очередь, поверх диска 3.

На этот раз для завершения задачи потребовалось семь перемещений. Отметим, что этот результат можно представить в виде $2^3 - 1$, поскольку $2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$. Как и в предыдущем варианте с двумя дисками, отметим, что показатель степени «3» соответствует числу дисков, участвующих в игре.

Уже очевидно, что общая схема, вероятно, проясняется. Если бы нам пришлось играть в игру «Ханойские башни» с четырьмя, пятью и более дисками, мы фактически обнаружили бы, что число перемещений возрастает в соответствии и общей формулой $2^n - 1$. В этой формуле n представляет число дисков. В головоломке Люка число дисков равно 64, поэтому число перемещений, необходимых для того, чтобы выполнить задачу переноса дисков с первого стержня на третий, равно $2^n - 1 = 2^{64} - 1$, что, как мы уже упоминали, является астрономически большим числом. Ниже приведена сводная таблица для шестидесяти четырех вариантов этой игры, то есть для вариантов игры с одним, двумя, тремя и так далее дисками, вплоть до шестидесяти четырех.

ТАБЛИЦА 6-3: ХАНОЙСКИЕ БАШНИ – 64 ВАРИАНТА

Диски	Число требуемых перемещений				
	$2n - 1$ (n = число дисков)				
1	$2^n - 1$	=	$2^1 - 1$	=	$(2 - 1) = 1$
2	$2^n - 1$	=	$2^2 - 1$	=	$(4 - 1) = 3$
3	$2^n - 1$	=	$2^3 - 1$	=	$(8 - 1) = 7$
4	$2^n - 1$	=	$2^4 - 1$	=	$(16 - 1) = 15$
5	$2^n - 1$	=	$2^5 - 1$	=	$(32 - 1) = 31$
6	$2^n - 1$	=	$2^6 - 1$	=	$(64 - 1) = 63$
7	$2^n - 1$	=	$2^7 - 1$	=	$(128 - 1) = 127$
...	...				
64	$2^n - 1$	=	$2^{64} - 1$	=	очень большое число

Говоря на языке строгих математических терминов, каждое из чисел перемещений, необходимых в последовательных вариантах игры, оказывается на 1 меньше последовательного члена геометрической прогрессии, имеющей 2^n последним членом:

$$\{(2^1 - 1), (2^2 - 1), (2^3 - 1), (2^4 - 1), \dots, (2^n - 1)\} = \{1, 3, 7, 15, 31, \dots\}.$$

Как можно видеть, головоломка Люка является простой но «драматической» иллюстрацией огромной скорости «экспоненциального» роста.

Математические комментарии

Понятие экспоненциального роста захватывало воображение многих создателей головоломок на протяжении всей истории. В 1256 г. арабский математик ибн Калликан остроумно использовал для его иллюстрации шахматную доску. Его головоломку можно перефразировать следующим образом:

Сколько зерен пшеницы потребуется положить на последнюю клетку шахматной доски с шестьюдесятью четырьмя клетками, если на первую клетку положено одно зерно, на вторую два, на третью четыре, на четвертую восемь и так далее по тому же правилу?

Как и головоломка Люка, эта головоломка производит геометрическую прогрессию: $\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{63}\}$. Каждый ее член обозначает число зерен на каждой последовательной клетке шахматной доски:

На первой клетке: 1 зерно = 2^0 зерен

На второй клетке: 2 зерна = 2^1 зерен

На третьей клетке: 4 зерна = 2^2 зерен

На четвертой клетке: 8 зерен = 2^3 зерен

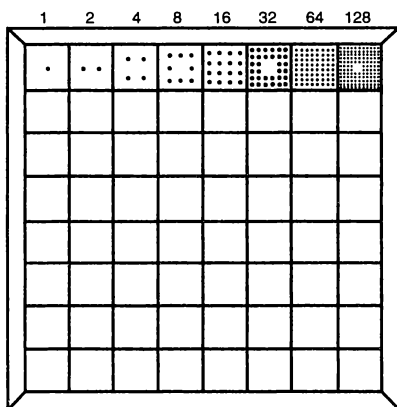
На пятой клетке: 16 зерен = 2^4 зерен

...

На шестьдесят четвертой клетке: = 2^{63} зерен.

Далее показано, как выглядит шахматная доска с зернами, лежащими на восьми клетках ($2^7 = 128$):

Если мы используем n для обозначения номера члена ряда, то последний (шестьдесят четвертый) член будет иметь (2^{n-1}). Это указывает на то, что степень члена, представляющего определенную клетку шахматной доски на единицу меньше, чем номер клетки. Величина 2^{63} столь велика, что ум приходит в смятение при мысли о том, каким же способом шахматная доска сможет удержать столь-



ко зерен, не говоря уж о том, где столько зерен взять. Шестьдесят четыре клетки вместили бы около $1,84 \times 10^{19}$ бушелей, что в несколько раз больше чем годовой урожай, собираемый во всем мире.

Совершенные числа и простые числа Мерсенна

Головоломка ибн Калликана таит в себе несколько поистине интригующих схем. Например, если к первой шахматной доске приставить рядом вторую, то куча зерен на последней клетке (128-й клетке) второй доски содержит 2^{127} зерен. Если мы вычтем 1 из этого числа, $(2^{127} - 1)$, то получим следующий результат:

170 141 183 460 231 731 687 303 715 884 105 727. Невероятно, но это число является простым!

Вы, возможно, заметили, что вычитание единицы из числа зерен на любой клетке шахматной доски эквивалентно представлению этой клетки с помощью формулы Ханойских башен: $(2^n - 1)$. За этой формулой стоит интересная история. Например, ее использовал Евклид для порождения так называемых совершенных чисел.

Совершенное число определяется как целое число, равное сумме своих делителей, исключая самого себя. Наименьшим совершенным числом является число 6, у которого есть три делителя, 1, 2 и 3 ($6 = 1 \times 2 \times 3$), которые в сумме дают 6 ($= 1 + 2 + 3$). Следующим совершенным числом является число 28, делители которого (1, 2, 4, 7, 14) в сумме дают 28 ($= 1 + 2 + 4 + 7 + 14$). Совершенные числа многие века поражали воображение людей. Блаженный Августин (354–430) в своем «Граде Божьем» утверждает, что Богу потребова-

лось шесть дней для сотворения мира, а в седьмой день он отдыхал, потому что 6 есть совершенное число, символ совершенства творения. Между прочим, следующими тремя совершенными числами после 6 являются 28 (как мы уже видели), 496 и 8128. Потребовалось около 1400 лет после того, как они были обнаружены в Древней Греции, прежде чем было открыто пятое. Это число равно 33 550 336. Насколько мне известно, к настоящему времени открыто только семнадцать совершенных чисел. Последнее из них состоит из 1373 цифр, и его запись заполнила бы всю эту страницу.

Евклид утверждал, что формула $[2^{n-1} (2^n - 1)]$ порождает все совершенные числа. Но, как выяснилось, она порождает только четные совершенные числа, в случае если содержащееся в ней выражение $(2^n - 1)$ является простым числом. Этот факт был доказан Леонардом Эйлером через два тысячелетия после Евклида. Например, если $n = 2$, то $(2^n - 1) = (2^2 - 1) = (4 - 1) = 3$. Так как это простое число, мы можем воспользоваться для порождения совершенного числа формулой Евклида:

$$[2^{n-1} (2^n - 1)] = [2^{2-1} (2^2 - 1)] = [2^1 (4 - 1)] = (2) (3) = 6.$$

Ни одного нечетного совершенного числа до сих пор не найдено. Возможно, что их не существует.

Давайте теперь взглянем в шахматную доску ибн Калликана сквозь призму формулы Евклида. Напомним, что числа зерен на последовательных клетках могут быть представлены формулой 2^n , начиная с $n = 0$.

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

Если мы уберем по одному зерну с каждой клетки, результат, как мы уже замечали, будет $(2^n - 1)$. Оказывается, эту формулу можно использовать для проверки того, является ли число в данной клетке простым. Например, в четвертой клетке имеется 2^3 или 8 зерен. Если мы уберем с нее одно зерно, $(2^3 - 1)$, мы получим число 7, которое является простым. Простые числа, произведенные таким способом, называются **простыми числами Мерсенна**, известными также как просто **числа Мерсенна**, по имени французского математика Марена Мерсенна (1588–1648), который использовал формулу $(2^n - 1)$ для проверки того, является ли число простым или нет. Будучи приложенной к шахматной доске ибн Калликана, эта формула производит простые числа в клетках, которые затенены на рисунке выше.

Клетки	Число в клетке	Число Мерсенна в клетке	Простое число
3-я	$2^2 = 4$	$(2^n - 1) = 2^2 - 1$	3
4-я	$2^3 = 8$	$(2^n - 1) = 2^3 - 1$	7
6-я	$2^5 = 32$	$(2^n - 1) = 2^5 - 1$	31
8-я	$2^7 = 128$	$(2^n - 1) = 2^7 - 1$	127
и т. д.			

Тест Мерсенна для простых чисел использовался для построения больших простых чисел. Например, в 1978 г. два студента высшей школы в Калифорнии, Лаура Никел и Курт Лэндон Нолл, используя компьютерные техники, обнаружили, что число $(2^{21\,701} - 1)$ является простым. Это было двадцать пятое из открытых к тому времени простых чисел Мерсенна. В 1996 г. Свободное международное интернет-сообщество энтузиастов больших чисел, основанное компьютерным программистом из Флориды Джорджем Вольтманом, известное как GIMPS (the Great Internet Mersenne Prime Search), обнаружило, что число $(2^{3\,021\,377} - 1)$ является простым. Это было тридцать седьмое из обнаруженных простых чисел Мерсенна. Оно состоит из 909 526 цифр. В 1999 г. эта группа открыла еще одно число Мерсенна $(2^{6\,972\,593} - 1)$, число, содержащее 2 098 960 цифр.* Заинтересованный читатель может записать адрес GIMPS в Интернете: www.mersenne.org.

*Наибольшее из известных простых чисел Мерсенна, сорок третье, обнаружено в декабре 2005 г. в центральном университете штата Миссури и равно $2^{30\,402\,457}$. (Примеч. пер.)

Бесконечность

Поиски все больших и больших простых чисел вызвали к жизни вопрос о математической бесконечности. Древние греки, конечно, знали о важности изучения бесконечности, как мы увидим в главе 8. Но тем, кто на пороге XX века превратил эти исследования в раздел математики, был немецкий математик Георг Кантор.

Великий итальянский ученый Галилео Галилей (1564–1642) подозревал, что понятие математической бесконечности бросает серьезный вызов здравому смыслу. В своих «Диалогах о двух главных системах мира», изданных в 1632 г., он отмечал, что множество квадратов целых чисел можно поставить во взаимно однозначное соответствие со всеми положительными целыми числами, а это ведет к противоречащей здравому смыслу возможности того, что квадратов целых чисел имеется столько же, сколько и самих этих чисел (даже несмотря на то, что сами эти квадраты являются лишь частью множества натуральных чисел).

ГЕОРГ КАНТОР

Кантор родился в Санкт-Петербурге (Россия) в семье немцев. Его ранние работы в области исследования рядов привели к развитию **теории множеств** (изучающей свойства множеств), на которой основан современный математический анализ. Его работы, касающиеся бесконечных рядов, потрясли основания математики и до сих пор вызывают некое содрогание.

Как это может быть, принимая во внимание тот факт, что не все числа являются квадратами какого-либо числа, как, по-видимому, показывает следующее ниже сравнение двух рядов?

Целые	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
Квадраты	1	—	—	4	—	—	—	—	9	—	—	—	...

Как можно ожидать, из этого сравнения становится ясным, что в нижнем множестве (множестве квадратов целых чисел) имеется еще много «пробелов», поскольку оно является подмножеством верхнего множества (множества натуральных чисел). Здравый смысл приводит нас к заключению, что множество натуральных

чисел содержит поэтому гораздо больше элементов, чем множество их квадратов. Но это не так. В 1872 г. Кантор вновь обратился к прозрению Галилея и показал, что в конечном счете оно верно: эти два множества содержат одинаковое количество элементов. Это можно показать, просто удалив пробелы в приведенном выше представлении и приведя квадраты целых чисел во взаимно однозначное соответствие с полным множеством натуральных чисел. Этот результат показывает, что никаких «остатков» не образуется, независимо от того, насколько далеко мы распространим это сравнение. Каждое натуральное число может быть поставлено в соответствие в точности одному квадрату целого числа, и наоборот.

Целые	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
Квадраты	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	...

Заметим, что еще более странным представляется тот факт, что такое же взаимно однозначное соответствие может быть установлено между натуральными числами и этими же числами, возведенными в любую степень.

Целые	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
Квадраты	1^n	2^n	3^n	4^n	5^n	6^n	7^n	8^n	9^n	10^n	11^n	12^n	...

Эта простая, но блистательная техника сравнивания, так сказать, «подбросила ложку дегтя в бочку меда». Аргументы Кантора, когда он впервые их обнародовал, произвели в математических кругах эффект землетрясения. Его последствия можно ощущать и сегодня.

Изучение математической бесконечности полно парадоксов. Например, можно построить взаимно однозначное соответствие между множеством «счетных» чисел и любым его подмножеством. Отметим два случая: четные и нечетные числа:

Целые	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
Четные числа	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	...

В каждом ряду последовательность знаменателей (q) представляет собой целые числа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$. Числителем (p) для всех чисел в первом ряду является 1; для чисел во втором ряду — 2; для чисел в третьем ряду — 3, и так далее. Таким способом все числа, имеющие форму p/q , попадают в приведенную таблицу. Кантор заключил в скобки каждую дробь, в которой числитель и знаменатель имеют общий делитель. Если удалить эти дроби, то любое число появляется в таблице один и только один раз. Далее Кантор построил взаимно однозначное соответствие между натуральными числами и числами в таблице следующим образом: он сопоставил кардинальное число 1 числу $1/1$ в верхнем левом углу таблицы; 2 — числу $2/1$ на шаг ниже; следуя стрелке, он сопоставил 3 числу $1/2$; следуя стрелке, он сопоставил 4 числу $1/3$, и так далее до бесконечности. Путь, указываемый стрелками, позволяет нам, таким образом, установить взаимно однозначное соответствие между кардинальными числами и всеми рациональными числами (исключая числа, заключенные в скобки):

Целые	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
Числа	$1/1$	$2/1$	$1/2$	$1/3$	$3/1$	$4/1$	$3/2$	$2/3$	$1/4$	$1/5$	$5/1$	$6/1$	$5/2$...
в таблице														

Каков вывод? Рациональных чисел имеется столько же, сколько и натуральных чисел! Нельзя не восхититься тем элегантным и простым методом, с помощью которого Кантор провел свою умопомрачительную демонстрацию. На самом деле, как только простота, присущая принципам всеобъемлющей теории Кантора, становится понятной, эти принципы перестают казаться продуктом возбужденного воображения математического эксцентрика.

Кантор классифицировал числа с одним и тем же конечным кардинальным числом как принадлежащие к множеству «алеф ноль» или \aleph_0 (\aleph — это первая буква еврейского алфавита). Он назвал \aleph_0 **трансфинитным числом** (числом, которое больше любого конечного числа). Как это ни удивительно, Кантор обнаружил, что существуют и другие трансфинитные числа. Существуют множества чисел с мощностями, большими, чем мощность множества целых чисел. Он обозначил следующие в порядке возрастания трансфинитные числа с помощью ряда $\{\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots\}$.

Читатель может теперь спросить: а как же могут существовать разные трансфинитные числа? Доказательство Кантора и здесь яв-

ляется замечательным по простоте. Предположим, что мы записали в десятичной форме все числа, лежащие между 0 и 1 на числовой прямой. Давайте перенумеруем все эти числа $\{N_1, N_2, \dots\}$. Заметим, что между 0 и 1 имеется так много возможных чисел вида p/q , что мы, может быть, не сможем расположить их по порядку. Итак, пусть заданные здесь числа будут следующими:

$$N_1 = 0,4225896\dots$$

$$N_2 = 0,7166932\dots$$

$$N_3 = 0,7796419\dots$$

...

Каким образом мы можем построить число, которого нет в этом списке? А вот как. Обозначим это число символом C . Чтобы построить его, сделаем следующее: (1) в качестве первой цифры его десятичной дроби выберем число на 1 большее, чем цифра на первом месте записи числа N_1 ; (2) в качестве второй цифры выберем число на 1 большее, чем цифра на втором месте в записи числа N_2 ; (3) в качестве третьей цифры выберем число на 1 большее, чем цифра на третьем месте в записи числа N_3 ; (4) и так далее:

$$N_1 = 0,\underline{4}225896\dots$$

Конструируемое число C должно начинаться с 5, а не с 4 после разделительной десятичной точки:

$$C = 0,5\dots$$

$$N_2 = 0,7166932\dots$$

Конструируемое число C должно иметь на втором месте 2, вместо 1:

$$C = 0,52\dots$$

$$N_3 = 0,7796419\dots$$

Конструируемое число C должно иметь на третьем месте 0, вместо 9:

$$C = 0,520\dots$$

И т.д.

Теперь число $C = 0,520\dots$ оказывается отличным от N_1, N_2, N_3 и так далее, потому что его первая цифра отлична от первой цифры N_1 , его вторая цифра отлична от второй цифры N_2 , его третья цифра отлична от третьей цифры N_3 , и так далее, до бесконечности. На самом деле мы только что построили трансфинитное число, отличное от \aleph_0 . Оно нигде не появляется в предыдущем списке.

Заключительные замечания

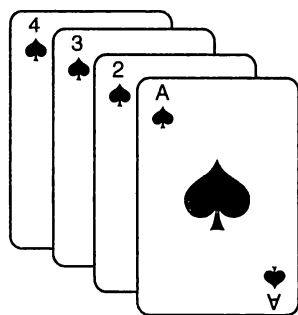
Исследование бесконечности поистине является делом интригующим, захватывающим дух и в то же время таким простым. Головоломку «Ханойские башни» также можно простым способом превратить в воображаемую модель математической бесконечности. Это можно сделать, представив себе, что число стержней, их относительные длины и протяженность доски, лежащей в основании, неограниченны. Тогда игра может продолжаться до бесконечности.

В понятии вечной игры заключено нечто мистическое. Это понятие можно обнаружить в последнем романе великого немецкого писателя Германа Гессе (1877–1962) «Игра в бисер» (1943). В этом романе мастеру игры в бисер постепенно открывается смысл жизни, а сама игра заключается в создании бесконечно повторяющихся узоров. Нет никаких свидетельств о том, что Гессе знал об игре Люка, или даже если он знал о ней, что она как-то повлияла на него при написании этого шедевра. Но идея о том, что жизнь является вечной игрой с простыми правилами, блистательно выражена и в головоломке и в романе. Форма головоломки Люка представляется столь же метафорической, сколь и математической.

Упражнения

Игры Люка и ибн Калликана

48. Это карточный вариант игры в Ханойские башни. Возьмем четыре карты одинаковой масти, например, пики, упорядоченные по достоинству, например, туз, двойку, тройку и четверку. Положим карты в определенное место, назвав его А. Зарезервируем два пустых места, В и С, справа от карт:



A

B

C

Цель состоит в том, чтобы переместить карты на место C, выполняя следующие правила: (1) карта большего достоинства никогда не должна оказаться на карте меньшего достоинства; (2) за один ход можно перемещать на новое место только одну карту.

49. Вспомним, что формула Мерсенна ($2^n - 1$) в определенных клетках шахматной доски ибн Килликана порождает простые числа.

Клетка	Значение n	Число в клетке	Формула Мерсенна	Простое число Мерсенна
3-я	2	$2^2 = 4$	$(2^n - 1) = 2^2 - 1$	3
4-я	3	$2^3 = 8$	$(2^n - 1) = 2^3 - 1$	7
6-я	5	$2^5 = 32$	$(2^n - 1) = 2^5 - 1$	31

и т. д.

Значения n для девяти простых чисел Мерсенна на шахматной доске таковы:

Клетка	Значение n (в 2^n)
3-я	2
4-я	3
6-я	5
8-я	7
14-я	13
18-я	17
20-я	19

Клетка	Значение n (в 2^n)
32-я	31
62-я	61

Усматриваете ли вы здесь правило?

50. Что случилось бы, если бы условия головоломки ибн Каллика-на были изменены следующим образом?

- Число зерен на каждой четной клетке получается путем умножения на 2^n числа зерен на предыдущей нечетной клетке.
- Число зерен на каждой нечетной клетке получается путем деления пополам числа зерен на предыдущей (четной) клетке.

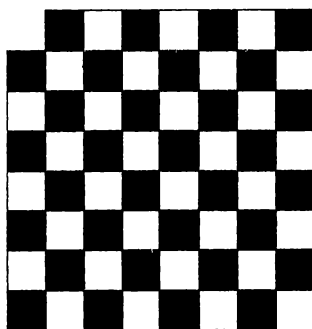
Начинаем мы снова с одного зерна на первой клетке. Можете ли вы обнаружить схему в последовательности, построенной таким образом?

51. Шахматная доска служила источником всякого рода головоломок, использующих математические идеи, с момента ее появления много веков назад. Одна из них, попадающая практически в каждую антологию головоломок благодаря ее видимой трудности, но обманчиво простому решению, формулируется следующим образом:

Можно ли покрыть шахматную доску костяшками домино, если удалить из нее две противоположных угловых клетки? Предположим, что размер костяшки домино равен размеру двух соседних клеток шахматной доски. Костяшки домино нельзя помещать поверх других костяшек, а можно класть только на доску.

Шахматная доска, из которой удалены две противоположные угловые клетки

Костяшка
домино



Бесконечность

52. Покажите, что натуральные числа можно поставить во взаимно однозначное соответствие с:

- А. множеством чисел, кратных 10;
- В. подмножеством дробей с постоянным числителем 1 и упорядоченными знаменателями, представляющими собой целые числа от 1 до бесконечности.

53. Рассмотрим первое трансфинитное число \aleph_0 :

- А. Что произойдет, если мы прибавим к нему 1?

$$\aleph_0 + 1 = ?$$

- В. Что произойдет, если мы прибавим к нему произвольное число n ?

$$\aleph_0 + n = ?$$

- С. Что произойдет, если мы удвоим его?

$$\aleph_0 + \aleph_0 = 2\aleph_0 = ?$$



Головоломка Лойда «Таинственное исчезновение»

Поэтому, когда бы люди ни заблуждались и ни составляли бы мнений, далеких от истины, ясно, что ошибка закралась в их умы благодаря ее определенному сходству с истиной.

СОКРАТ (469–399 ДО Р.Х.)

Самым искусным создателем головоломок всех времен был, безусловно, американский инженер Сэм Лойд. Как мы видели в главе 4, именно он изобрел головоломку «Пятнашки», решение которой стало первой поистине мировой «манией». Лойд ввел в обращение множество столь же остроумных головоломок и игр, продолжающих забавлять и развлекать людей по сей день. Многие из них заставляют не верить своим глазам, производя такое же мистифицирующее действие, как и магические трюки.

Одним из таких головоломных приборов с «магическим действием», не переставшим приводить в замешательство людей, сталкивающихся с ним впервые, является головоломка «Таинственное исчезновение».

СЭМ ЛОЙД (1841–1911)

Сэм Лойд родился в Филадельфии и получил образование инженера. Однако, став в 1860 г. редактором отдела задач Шахматного ежемесячника, он осознал, что может с комфортом существовать, зарабатывая только головоломками.

Работая в маленьком пыльном офисе в Нью-Йорк Сити, Лойд создал за свою жизнь около десяти тысяч головоломок. Большая часть из них бросает серьезный вызов «фанатам» головоломок, заставляя тех проводить несчетные часы в попытках их разрешения.

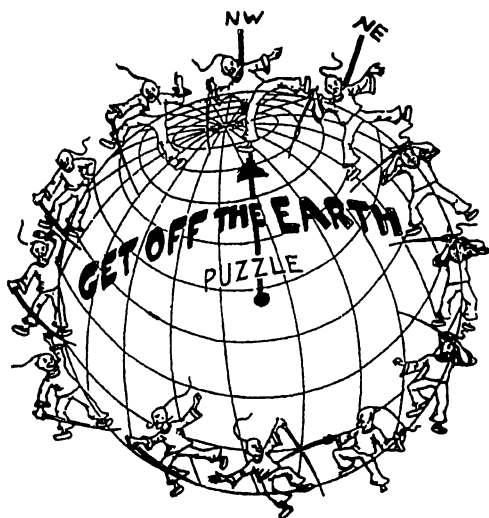
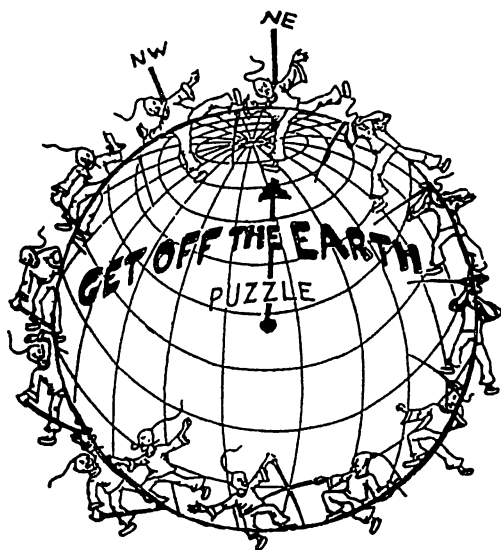
Но, подобно головоломке «Пятнашки», она тоже не является простым упражнением в умственной ловкости рук. Оказывается, что эта головоломка проливает свет на некоторые важные математические вопросы, связанные с геометрическими построениями, и ее используют многие преподаватели, чтобы подчеркнуть для студентов важность исследования всех фактов и всех результатов, не принимая просто так на веру утверждения об их истинности. Именно поэтому ее следует квалифицировать как одну из десяти величайших головоломок всех времен.

Головоломка

Головоломка Лойда представляет собой остроумный трюк типа «разрежь-и-сдвинь». Идея, лежащая в основе этой конструкции, вероятно, восходит к головоломке, которую некий Уильям Хупер включил в изданную в 1774 г. книгу под названием «Развлечения для ума». Лойд создал свой вариант, прикрепив булавкой к большому кругу меньший так, чтобы последний мог поворачиваться вокруг булавки. Затем с помощью соответствующего рисунка он изобразил фигуру, напоминающую земной шар, и на нем тринадцать китайских воинов. Лойд запатентовал свою головоломку в 1897 г. Она была продана в количестве более 10 миллионов экземпляров.

Если маленький круг немного повернуть, как показано далее, тринадцать воинов таинственным образом превращаются в двенадцать. Куда девался тринадцатый воин?

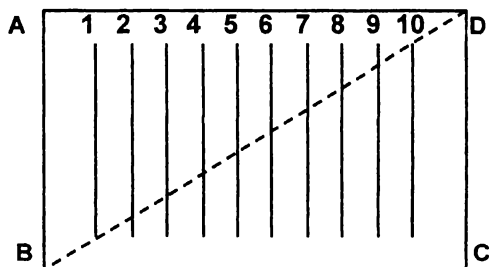
Китайские воины сделаны в виде набора более мелких деталей, изображающих руки, ноги, тела, головы и мечи. Когда земной шар



вращается, детали перестраиваются таким образом, что каждый китайский воин получает кусочек от своего соседа. Например, внизу слева два воина следуют непосредственно друг за другом. У того, что сверху, отсутствует ступня. Когда земной шар поворачивается, он получает ступню от своего соседа справа. Этот сосед получает

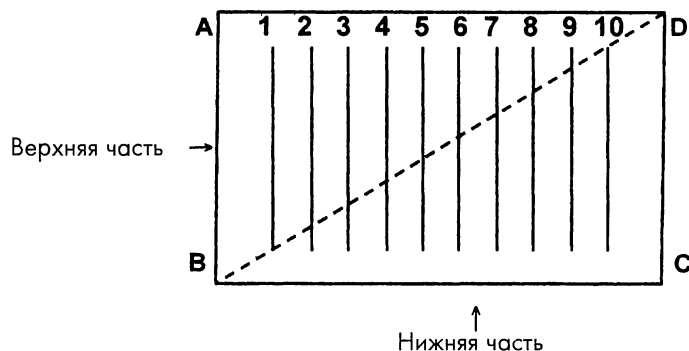
две ступни (одной у него не было) и маленький кусочек голени. В результате поворота один из воинов «потеряет» все свои части, создавая видимость того, что он исчез.

Чтобы уловить остроумную идею, лежащую в основе этой головоломки, рассмотрим трюк с исчезновением параллельного отрезка. Прямоугольник $ABCD$, содержащий десять параллельных равноудаленных от соседей отрезков, пересечен пунктирной диагональю:

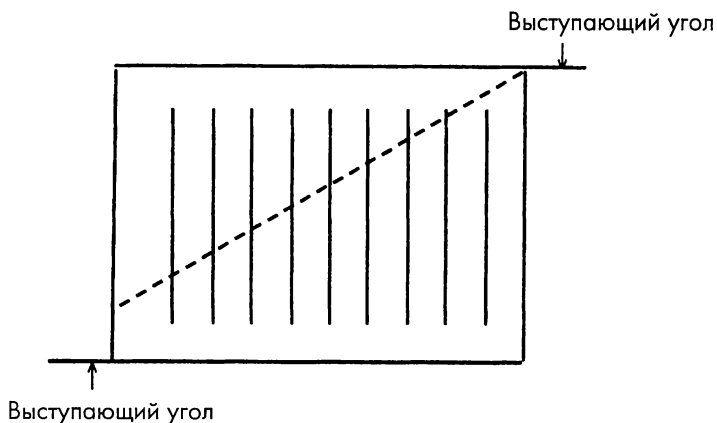


Как можно видеть, диагональ касается верхней точки линии 10 и нижней точки линии 1. Читатель может нарисовать эту прямоугольную фигуру на листе бумаги, следя, чтобы десять перпендикулярных краю отрезков были равны по длине и находились на равных расстояниях друг от друга. Пунктирную диагональ нужно провести так, чтобы она касалась верха отрезка 10 и низа отрезка 1. Может потребоваться несколько черновых вариантов, прежде чем получится правильная фигура. Но сделать ее правильно важно в решающей степени, в противном случае трюк с исчезновением не сработает.

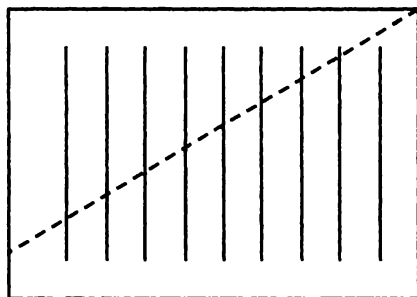
Разрежем теперь прямоугольник вдоль пунктирной линии, разделив его на верхнюю и нижнюю части:



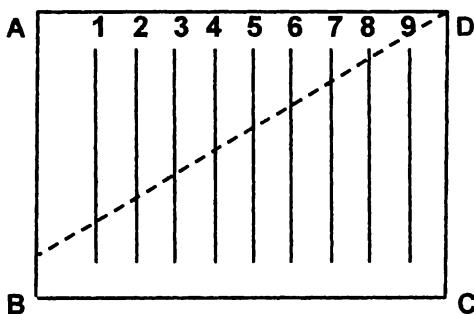
Далее сотрем номера отрезков и буквы в углах прямоугольника. Затем сдвинем нижнюю часть вниз и влево, но только на то расстояние, при котором отрезки на нижней части снова совпадут с отрезками на верхней части (см. рисунок внизу). Таким путем мы, как кажется, сохраняем внутренние линии в прямоугольнике. Однако получаются два выступающих угла, в чем читатель может самостоятельно убедиться на своем собственном бумажном варианте прямоугольника:



Отрежем выступающие углы. Это даст нам новую, немного уменьшенную прямоугольную фигуру:



Если мы перенумеруем отрезки на новой фигуре и используем буквы для обозначения угловых точек прямоугольника, мы обнаружим, что теперь внутри прямоугольника имеется только девять линий:



Что случилось с десятым отрезком? Ничего.

Давайте проанализируем наш «трюк с исчезновением». После разрезания линии 1 и 10 остаются неизменными, в то время как остальные линии (от 2 до 9) оказываются разделенными на два сегмента каждая. Когда мы сдвигаем нижнюю часть, мы создаем новые внутренние линии. Как можно видеть из рисунков, каждая из них состоит теперь из своего верхнего сегмента и находящегося на одной линии с ним нижнего сегмента, который раньше был частью линии, находящейся непосредственно справа от данной. Десятая линия все еще здесь, но она теперь входит в качестве нижнего сегмента в девятую линию. Разумеется, если мы сдвинем нижнюю часть обратно, десятая линия появится вновь.

Именно этот тип трюка «разрежь-и-сдвинь» использовал Ллойд для того, чтобы создать свое «Таинственное исчезновение». Когда меньший круг Ллойда поворачивается, части тел воинов, подобно отрезкам в нашем прямоугольнике, перестраиваются, создавая впечатление, что один из воинов, как и десятая линия, исчезает.

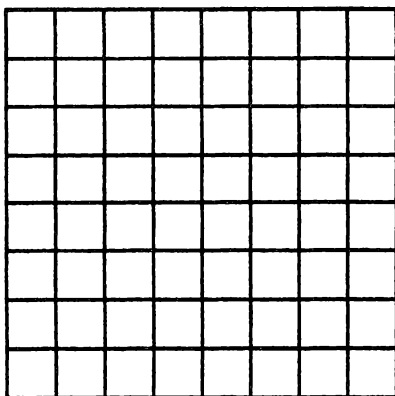
Математические комментарии

Построение и разрезание фигур с помощью двух инструментов, линейки (или угольника) и циркуля, всегда образовывали «конкретные» техники для исследования свойств некоторых фигур и доказательства касающихся их теорем. Как мы видели здесь, головоломка Ллойда использует простую технику разрезания, которая всегда с успехом дурачит людей, не осведомленных о том, как Ллойд использовал ее для создания своей иллюзии.

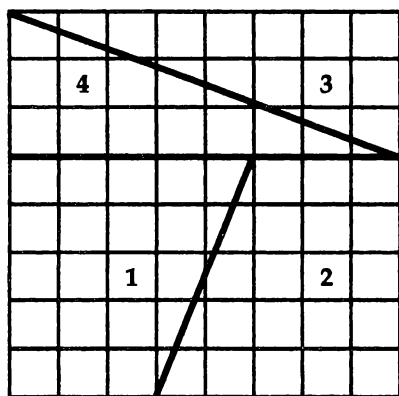
Разрезание

Головоломка Лойда принадлежит к жанру трюков, основанных на разрезании. Рассмотрим следующую хорошо известную головоломку. Ее первоначальная версия появилась в 1868 г. Сэм Лойд в 1914 г. включил ее в свою *Cyclopedia of Tricks and Puzzles*.

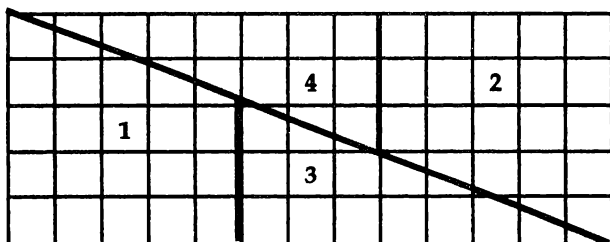
Начните с того, что разделите квадратный кусок бумаги на шестьдесят четыре маленьких квадрата, подобно шахматной доске. Результатом будет, конечно, квадрат 8×8 :



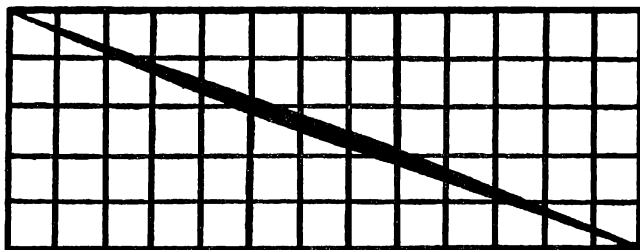
Разрежьте эту шахматную доску на две трапеции (фигуры 1 и 2) и два треугольника (фигуры 3 и 4). Трапецией называется четырехугольная плоская фигура, у которой две противоположные стороны параллельны друг другу.



Наконец, перестройте эти четыре фигуры в прямоугольник, изображенный ниже:



Сосчитайте теперь маленькие квадраты в прямоугольнике. Их число равно 5×13 , или 65. Но постойте! Это же на один больше, чем шестьдесят четыре квадрата, которые были в первоначальном квадрате, использованном нами для создания прямоугольника! Откуда здесь взялся лишний квадратик? Дело в том, что края четырех фигур, которые мы вырезали, на самом деле не совпадают друг с другом на линии диагонали. Более внимательное рассмотрение показывает, что вдоль диагонали на самом деле имеется зазор в виде длинного и очень узкого параллелограмма, который почти не заметен. На следующем рисунке он выделен черным цветом, чтобы было видно его местоположение:



Но это еще не все. Если мы вычтем из площади прямоугольника, $5 \times 13 = 65$, площадь квадрата, $8^2 = 64$, мы, разумеется, получим в виде разности число 1, то есть площадь «дополнительного» квадрата. Давайте выпишем это в следующем виде:

Площадь прямоугольника 5×13

Площадь первоначального квадрата 8^2

Разность между этими площадями $(5 \times 13) - 8^2 = 1$

Теперь посмотрите внимательней на цифры, содержащиеся в последнем выражении. Оказывается, эти цифры, 5, 8 и 13, являются тремя идущими подряд числами из последовательности Фибоначчи (глава 3)!

{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...}.

И даже больше. Если мы разрежем квадраты с размерами 3^2 , 21^2 и 55^2 таким же способом, как мы разрезали наш квадрат 8^2 , мы получим после перестройки прямоугольники с размерами 5×2 , 13×3 и 34×89 . Заметим, что все цифры в этих выражениях принадлежат последовательности Фибоначчи. В каждом случае в процессе перестройки возникает один лишний единичный квадрат. Замечательно, что вычитание площадей начальных квадратов из площадей прямоугольников тем же способом, как и раньше, тоже дает три последовательных числа Фибоначчи:

$$5 \times 2 - 3^2 = 1 \rightarrow \dots 2, 3, 5 \dots \text{ (из последовательности Фибоначчи)}$$

$$13 \times 34 - 21^2 = 1 \rightarrow \dots 13, 21, 34 \dots \text{ (из последовательности Фибоначчи)}$$

$$34 \times 89 - 55^2 = 1 \rightarrow \dots 34, 55, 89 \dots \text{ (из последовательности Фибоначчи)}$$

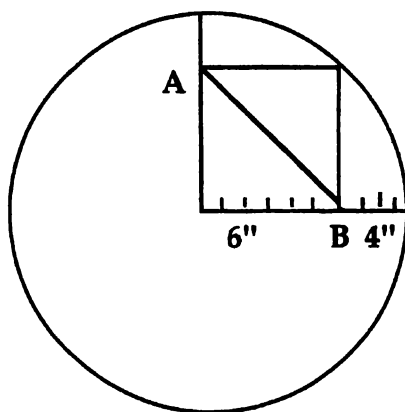
И т. д.

Этот результат приводит ум в замешательство. Он снова выявляет тот факт, что математика вся посвящена изучению схем, даже если такое изучение может иногда не иметь практических приложений. Связь между числами Фибоначчи и головоломкой на разрезание является одной из тех вещей, которые, как кажется, никуда не ведут, но тем не менее выглядят таящими в себе еще не выявленные скрытые смыслы.

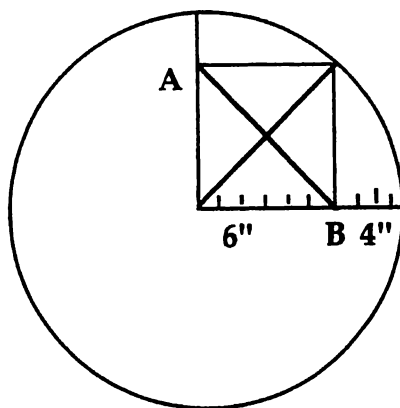
Головоломки на разрезание принадлежат царству геометрического воображения. Термин **геометрия**, происходящий от древнегреческих слов *geo*, «земля», и *metrein*, «измерять», описывает то, чем раньше занимались геометры. Они мерили размеры полей, соединяли стены зданий под прямыми углами, производили вычисления для других практически полезных вещей. И они пользовались диаграммами, чтобы представить свои измерения и свои проекты. Более точно, геометрия есть область математики, имеющая дело с построениями, свойствами и связями точек, линий, углов, кривых,

форм и твердых тел. Решение задач и головоломок в геометрии, на самом деле, требует знаний того, как правильно рисовать и интерпретировать диаграммы, что отражено в следующей классической головоломке:

Можете ли вы вычислить длину показанной на следующей диаграмме диагонали прямоугольника между точками А и В, если известна длина радиуса в дюймах?



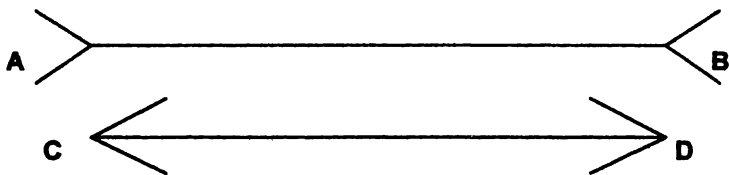
Эта головоломка кажется не имеющей решения. Догадка приходит при рассмотрении диаграммы в целом. Из школьной геометрии мы можем вспомнить, что две диагонали прямоугольника по длине равны друг другу. Нарисуем вторую диагональ:



Только что нарисованная диагональ является на самом деле радиусом круга. А так как длина радиуса равна 6 дюймам плюс 4 дюйма, или в целом 10 дюймам, и все радиусы круга равны между собой, только что нарисованная диагональ тоже имеет длину 10 дюймов. А так как диагонали прямоугольника равны, длина диагонали **AB** равна, таким образом, 10 дюймам.

Оптические иллюзии, двойственные фигуры и невозможные изображения

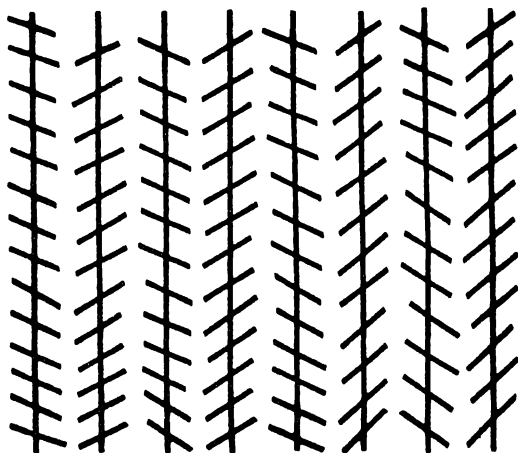
Помимо прочего головоломка Лойда представляет собой простое, хотя и не прямое введение в мир оптических иллюзий. Существуют фигуры, которые мы интерпретируем неправильно. Тема оптических иллюзий интересна с психологической и математической точек зрения и интенсивно исследовалась в обеих науках. Для целей настоящего обсуждения достаточно заметить, что **оптические иллюзии** обманывают зрение так, что оно неправильно интерпретирует некоторые фигуры. Например, большинство людей обычно считает, что на изображении внизу отрезок **AB** длиннее, чем отрезок **CD**, хотя длины этих отрезков одинаковы.



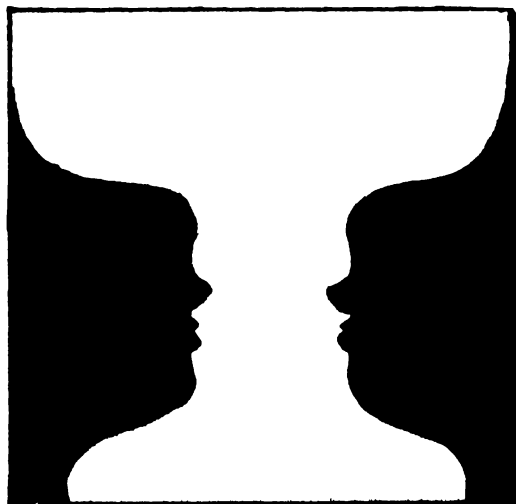
Эта иллюзия носит название иллюзии Мюллера–Лиера, по имени немецкого психолога Иоганнеса Мюллера (1801–1958), открывшего ее в 1840 г. Источником иллюзии, очевидно, является различная ориентация двух стрелок на концах отрезков. Читателю рекомендуется нарисовать два равных параллельных отрезка а затем добавить к ним стрелки аналогичным образом, чтобы пронаблюдать, как «эффект иллюзии» возникает, так сказать, из первых рук.

Следующая фигура представляет другую классическую оптическую иллюзию, созданную психологом Иоганном Целльнером (1834–1882). Эти линии не выглядят параллельными, но они параллельны. Линии кажутся наклоненными друг к другу, поскольку маленькие косые отрезки обманывают наше зрение, заставляя интерпретировать рисунок таким образом. Читателю снова рекомендуется

нарисовать несколько одинаковых вертикальных параллельных линий, а затем добавить к ним наклонные маленькие отрезки таким же способом и пронаблюдать самостоятельно, как возникает иллюзия.

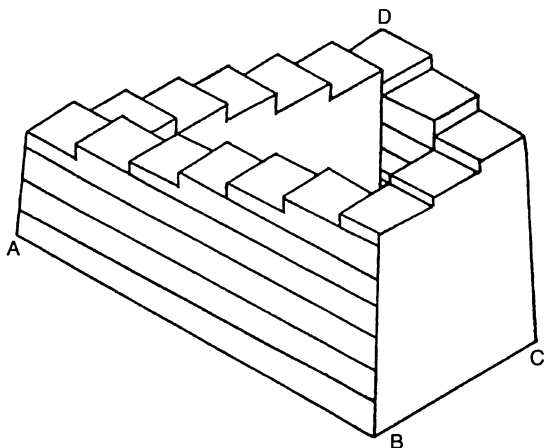


Некоторые фигуры психологи называют **двойственными**, поскольку в один момент времени мы воспринимаем их как нечто одно, а в другой — как нечто другое. Возможно, наиболее известной из всех двойственных фигур является фигура, помещенная ниже. Ее можно обнаружить практически в каждом вводном курсе по психологии восприятия:



Мы воспринимаем эту фигуру то как вазу, то как лица двух людей, обращенные друг к другу. Оба эти восприятия возникают внешне. Эту иллюзию приблизительно в 1910 г. создал голландский психолог Эдгар Рубин. Причиной двойственности, без сомнения, являются различные способы использования теней. Они порождают эффект **светотени**, из-за которого в один момент мы невольно фокусируем взгляд на темной части фигуры, а в другой — на светлой части. *Светотень* — это термин, который художники используют по отношению к распределению и контрасту зон света и тени на рисунке.

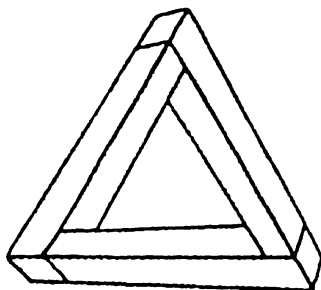
Существует еще один тип иллюзий, заслуживающих упоминания здесь. Они известны как **невозможные фигуры** и появляются в результате применения техники изображения объемных фигур на плоскости. Эту технику, известную как **изображение перспективы**, разработали художники эпохи Возрождения Филиппо Брунеллески (1377–1446) и Альбрехт Дюрер (1471–1528). Она используется для изображения объектов, подобных «кубам», на двумерной поверхности, например, на листе бумаги. Но ее также можно остроумно применить для обмана зрения — когда нужно вызвать восприятие трехмерных фигур, которых на самом деле не может быть. Например, взгляните на следующую лестницу.



Лестница, очевидно, идет вверх и вниз, вступая в противоречие со здравым смыслом: нет впечатления, что она имеет самую высокую или самую низкую точку! Если кто-нибудь начнет подъем в

точке D, то при движении против часовой стрелки он закончит путь снова в точке D, и, видимо, поднимаясь вверх с каждой ступенькой, все же оказывается не выше D. Таким же образом, если некто движется по часовой стрелке, спускаясь от точки D, он закончит путь снова в точке D. Таким образом, эта лестница кажется противоречащей всем принципам физики.

Одним из наиболее плодотворных изобретателей иллюзий этого вида является шведский художник Оскар Рейтесвард (1915—). Его произведения привлекают внимание как математиков, так и психологов. Ниже изображен его «дьявольский треугольник». Он называется так потому, что вызывает у зрителя раздражающее ощущение искажения и сюрреалистического дискомфорта. Данную версию этого треугольника на самом деле предложили британский биолог Л.С. Пенроуз и его сын физик Роджер Пенроуз:



Художником, превзошедшим всех в рисовании таких фигур, был Мориц Корнелис Эшер (1898—1972). Произведения Эшера выявляют сложные связи между восприятием и представлением. Его замыкающиеся на себя фигуры, зеркальные отражения конусов, шаров и кубов, соединяющиеся кольца и продолжающиеся спирали производят поистине умопомрачительные эффекты.

Заключительные замечания

Головоломка Лойда «Таинственное исчезновение» предупреждает нас о том, что к вещам, лежащим на поверхности, надо относиться с осторожностью. Вероятно, не это было побудительным мотивом для хитрого Лойда, когда он создавал свою головоломку, несущую золотые яйца. Но оказалось, что она является прекрасным проти-

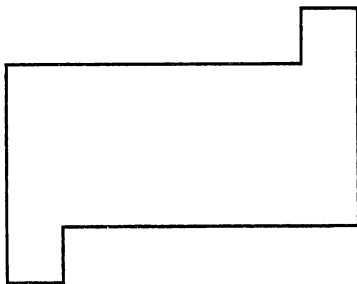
воядем и защитным средством против наивной тенденции принимать очевидность, данную в ощущениях, за правильную и заслуживающую доверия информацию.

Оптические иллюзии, двойственные фигуры и невозможные фигуры также предупреждают нас о том, что надо относиться с осторожностью к тому, что сообщают нам глаза. Они делают очевидным тот факт, что не одна лишь физиология зрения управляет восприятием. Скорее, оно является также и продуктом культурно обусловленных бессознательных предположений, которые мы привыкли делать относительно фигур. Они влияют на то, как наше зрение интерпретирует фигуры, нарисованные на плоскости.

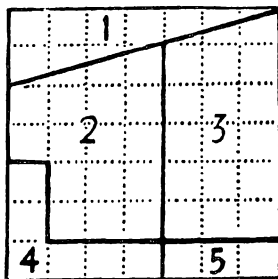
Упражнения

Головоломки на разрезание и перестройку

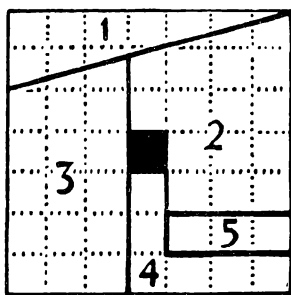
54. Как сделать полноценный прямоугольник из следующего прямоугольника с выступами, разрезав его на две части?



55. Взгляните на следующую фигуру:

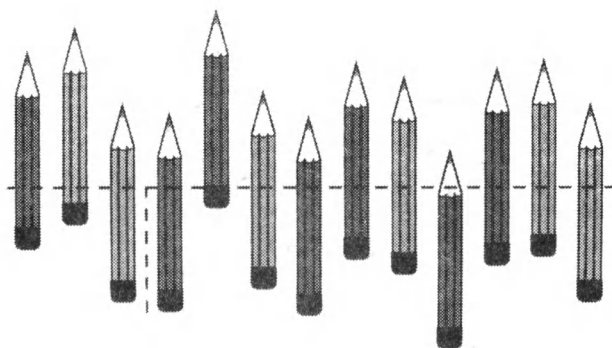


Читатель может сделать ее самостоятельно, наклеив лист разграфленной бумаги на кусок картона, вырезав квадрат 7×7 клеток и нарисовав внутри него линии, показанные на рисунке. Читателю следует затем разрезать квадрат по линиям на пять частей. После реорганизации этих частей показанным ниже способом в центре квадрата появляется дыра!



Но это не все. Первоначальный квадрат содержал сорок девять клеточек, а квадрат, полученный после перестройки частей, содержит лишь сорок восемь клеточек. Какая из клеточек исчезла и куда она делась?

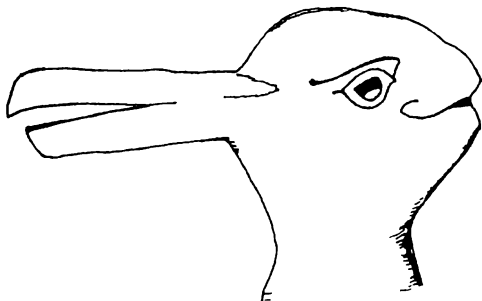
56. Взгляните на следующий рисунок, на котором нарисованы шесть светлых карандашей и семь темных.



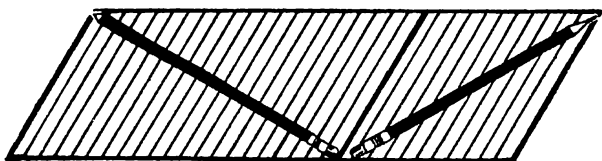
Теперь разрежьте его по линиям и переставьте левую и правую нижние части. Что произошло?

Оптические иллюзии и двойственные фигуры

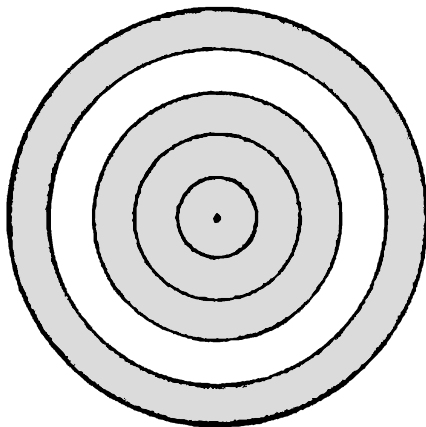
57. Видите ли вы две фигуры на рисунке ниже? Что они изображают?



58. Какой из двух карандашей длиннее? Измерьте их и выясните.



59. Следующий круг составлен из колец. Одно из них светлое. Радиус большого круга равен 5, а радиусы каждого из внутренних кругов равны 1, 2, 3 и 4. Какая из двух темных областей больше?





Парадокс Эпименида «Лжец»

Путь парадокса – это путь истины.
Чтобы подвергнуть реальность серьезному
испытанию, мы должны увидеть ее.
балансирующей на туго натянутой проволоке.
Об истине можно судить только тогда,
когда она становится акробатом.

ОСКАР УАЙЛЬД (1854–1900)

В V веке до Р.Х. в Греции вспыхнули интригующие дебаты о природе и функции логики в науке и математике. В них приняли участие выдающиеся философы, Парменид (около 510 до Р.Х.) и его ученик Зенон Элейский. Последний стал знаменитым благодаря ряду остроумных аргументов, которые, казалось, бросают вызов здравому смыслу. Эти аргументы получили название **парадоксов** (что буквально означает «конфликт с ожидаемым»).

Группа странствующих философов, называвшихся софистами (от греческого *sophos*, «умный»), объединилась вокруг Зенона, утверждая, что парадоксы демонстрируют несостоятельность логического мышления, что, по сути, оно лишь вводит в заблуждение.

ЗЕНОН ЭЛЕЙСКИЙ (около 489–435 до Р.Х.)

○ Зеноне почти ничего не известно, за исключением того, что он жил в греческой колонии Элеа на юге Италии.

С помощью своих остроумных парадоксов Зенон показал, что чисто логический подход к описанию реальности привел бы нас к заключению, что движение невозможно. Несмотря на их иконоборческую направленность, идеи, встроенные в эти парадоксы, постепенно привели к становлению исчисления и к пересмотру логических оснований математики.

С другой стороны, великий философ Аристотель (384–322 до Р.Х.) отменил парадоксы Зенона как упражнения в запутывающих рассуждениях. Аристотель настаивал, что главной характеристикой человеческого ума является способность мыслить логически. Развивая свою мысль, он придал логике формальную структуру, названную силлогизмом.

Вот пример **силлогизма** Аристотеля:

Большая посылка: Все люди смертны.

Малая посылка: Сократ — человек.

Вывод: Следовательно, Сократ смертен.

В большой посылке содержится утверждение, что категория обладает (или не обладает) определенным свойством, а в малой посылке утверждается, что определенный объект является (или не является) элементом этой категории. Тогда вывод подтверждает (или опровергает) тот факт, что рассматриваемый объект обладает этим свойством. Как бы они ни были остроумны, заявлял Аристотель, парадоксы в конечном счете не опровергают логику, поскольку не оспаривают ценность силлогизма. Но ответом Аристотеля дело не ограничилось. Вопреки ему история логики и математики дает позитивное подтверждение точки зрения Зенона.

По существу парадоксы являются головоломками логики. История гласит, что в процессе дебатов Протагор (около 480–411 до Р.Х.) ввел в обращение самый раздражающий из всех парадоксов. Протагор был первым философом, назвавшим себя софистом. Этот парадокс стал известен как парадокс «Лжец». Однако его наиболее знаменитая формулировка приписывается критянину по имени Эпи-

менид, жившему в VI веке до Р.Х. О его жизни практически ничего не известно, за исключением того, что на Крите он славился как поэт и прорицатель. Парадокс «Лжец» принадлежит к списку десяти величайших головоломок всех времен не только потому, что он продолжает удивлять людей и до сего дня, но также и потому, что он имел множество последствий в области исследования логики. Некоторые из них мы обсудим в этой главе.

Головоломка

Прежде чем приступить к рассмотрению парадокса «Лжец», полезно вкратце коснуться парадокса похожего вида, который известен практически всем:

Что было раньше, курица или яйцо?

Если вы скажете, что раньше была курица, кто-нибудь может возразить вам, что такое невозможно, поскольку курица должна сначала вылупиться из яйца. Если вы скажете, что раньше было яйцо, кто-нибудь опять может возразить вам, что такое невозможно, поскольку яйцо сначала должна снести курица. Вопрос о том, что было раньше, курица или яйцо, похоже, не поддается решению. Попытка ответить просто производит замену, ведущую нас дальше, в движение по бесконечному порочному кругу!

Парадокс «Лжец» приводит точно к такому же виду «порочного круга». Он дошел до нас приблизительно в следующей форме:

Критский философ Эпименид однажды сказал: «Все критяне лжецы». Правду ли сказал Эпименид?

Предположим, что Эпименид сказал правду. Тогда утверждение «Все критяне лжецы» является истинным утверждением. Однако мы должны заключить из этого, что Эпименид, будучи критянином, является также и лжецом. Но это приводит к противоречию. Очевидно, мы должны отвергнуть наше предположение. Предположим тогда противоположное, а именно, что Эпименид на самом деле лжец. Но тогда если он лжец, сделанное им утверждение «Все критяне лжецы» является верным. Но тогда мы снова приходим к противоречию: лжец не высказывает правдивых утверждений. Оче-

видно, мы попадаем в порочный круг так же, как в вопросе о курице и яйце.

Британский математик П.Е.Б. Иордан в 1913 г. предложил интересный вариант парадокса «Лжец», наглядно выражающий его суть:

На одной стороне карточки напечатано: «Утверждение на другой стороне этой карточки истинно». Но утверждение на другой стороне карточки гласит: «Утверждение на другой стороне этой карточки ложно». Что же утверждается на карточке?

Карточка заставляет вас поворачивать ее то одной, то другой стороной и чесать в затылке. На этом месте читатель может с удивлением спросить: а какое отношение имеет парадокс «Лжец» к математике? Ответ заключается в том, что математика всегда считалась свободной от логических порочных кругов. Но это не так. Вот почему парадокс «Лжец» зачаровывал математиков на протяжении всей истории, со временем становясь в один ряд с глубочайшими парадоксами, которые принесли в математику революционные изменения.

Математические комментарии

Дать математике прочное логическое обоснование, которое было бы свободно от порочных кругов, всегда было мечтой математиков. Но на пути этого грандиозного плана всегда вставали парадоксы. Они заставляли усомниться в самой логике. По этой причине, как это ни парадоксально (игра слов не преднамеренна), они играли решающую роль в истории математики. Попытки решить проблемы, которые они поднимали, на деле приводили к серьезным спорам и последующим открытиям и развитию науки.

Неразрешимость

Источником порочного круга в парадоксе «Лжец», конечно, является тот факт, что именно критянин Эпименид утверждает, что «все критяне лжецы». Это пример логической проблемы, которая возникает из **самоприменимости**. Она относится к случаю, когда произ-

носящий утверждение включает в утверждение самого себя. Английский философ Бертран Рассел (1872–1970) находил этот парадокс особенно тревожащим, чувствуя, что он угрожает самим основам логики и математики.

Чтобы исследовать природу самоприменимости более тщательно, Рассел сформулировал свою собственную версию парадокса «Лжец», называемую «парадокс брадобрея»:

Сельский брадобрей бреет всех тех и только тех селян, кто не бреется сам. Бреет ли он себя?

Брадобрей, как гласит расхожее выражение, «подвергнется пощипанию, если он будет брить самого себя и если не будет». Допустим, он решил брить самого себя. В результате он, конечно, станет бритым, но тем, кто побрил его, будет он сам. А это противоречит тому требованию, что сельский брадобрей «бреет всех тех и только тех селян, кто не бреется сам». Брадобрей на самом деле побрил того, кто бреется сам! Поэтому предположим, что он решил не брить самого себя. Но тогда он станет не бреющимся селянином. Это снова вступает в противоречие с условием, что он, брадобрей, бреет «всех тех и только тех селян, кто не бреется сам», включая себя самого! Рассел утверждает, что такая «неразрешимость» возникает из-за того, что брадобрей сам является жителем села. Если бы брадобрей был из другого села, парадокса бы не возникло.

Рассел, как до него немецкий философ Готлоб Фреге (1848–1925), пытался найти систему логической аргументации, в которой самоприменимость была бы исключена. Фреге, используя замечание жившего за два тысячелетия до него уроженца Софы (Киλικия) Хрисиппа (около 280–206 до Р.Х.), утверждал, что в высказываниях типа парадокса «Лжец» можно избежать порочного круга, рассматривая их *форму* отдельно от их *содержания*. Таким способом можно исследовать структуру высказываний, называемых в логике более специальным термином «**предложения**», независимо от их соответствия чему-либо (брадобреям, селам и т.д.). Подход Фреге в дальнейшем получил развитие в трудах кембриджского логика Людвиг Витгенштейна (1889–1951), который вместо слов использовал символы, чтобы гарантировать, что логическую структуру формы предложения можно было бы исследовать саму по себе, отдельно от любого содержания, к которому может предложение относиться. Если утверждение «Идет дождь» обозначить сим-

волом p , а утверждение «Светит солнце» символом q , то предложение «Или идет дождь или светит солнце» может быть записано в символической форме $p \vee q$ (где \vee = «или»). В предложении, где встречается квантор «все», он будет иметь вид перевернутого A : \forall . Так высказывание «Все критяне лжецы» можно представить в виде $\forall p$. Если такая форма поддается логическому исследованию, то это и решает дело. Витгенштейн утверждал, что проблемой является наше ожидание того, что логика будет интерпретировать для нас реальность. Но мы требуем от логики слишком многого. Система Витгенштейна получила известность как «символическая логика», система представлений, которую предвидел в воображении ни кто иной, как создатель головоломок Льюис Кэрролл в своей остроумной книге «Логическая игра» (переизданной в 1958 г.).

Рассел объединил силы с Альфредом Нортон Уайтхедом (1861–1947), чтобы издать в 1913 г. систему символической логики, названную *Principia Mathematica* («Основания математики»). Целью двух философов было решить проблему неразрешимости, подобную той, с которой мы сталкиваемся в парадоксе брадобрея, посредством полного отделения формы предложений от их содержания, относящегося к «реальному миру». На первый взгляд предложение Рассела и Уайтхеда казалось очень осмысленным. В конце концов, в музыке все, что действительно принимается в расчет, это форма мелодии, независимо от эмоций, которые она может вызывать. Мелодия хороша постольку, поскольку она состоит из гармонических составляющих. Но, увы, после опубликования *Principia Mathematica* оказалось, что и сама по себе форма предложений ведет к неожиданным парадоксам. Чтобы разрешить их, Рассел ввел понятие «типов», с помощью которого определенные типы предложений можно относить к разным уровням (более или менее абстрактным) и рассматривать, таким образом, отдельно от других типов. Казалось, что это устраняет проблему, во всяком случае на время.

Польский математик Альфред Тарский (1902–1983) развил далее расселовскую идею типов, назвав каждый более высокий уровень высказываний метаязыком. **Метаязык** это, в сущности, высказывание о другом высказывании. В основании иерархии метаязыков лежат прямые высказывания об объектах, такие как «Земля имеет одну Луну». Теперь, если вы говорите «Утверждение, что Земля имеет одну Луну, верно», вы используете другой тип языка, поскольку это высказывание о предыдущем высказывании. Это мета-

язык. В таком подходе, однако, имеется та проблема, что приходится вводить все более и более абстрактные метаязыки, чтобы оценить высказывания нижележащего уровня. Это может уводить в бесконечность. В действительности система Тарского только откладывает окончательное решение вопроса «Что есть что?». Рассмотрим, например, следующие два высказывания:

Следующее утверждение ложно.

Предыдущее утверждение истинно.

Утверждение 1 относится к утверждению 2. Поэтому оно принадлежит к некоторому метаязыку. Далее, утверждение 2, являющееся объектом утверждения 1, также сообщает нечто об утверждении 1. Поэтому оно тоже принадлежит метаязыку. Но постойте! Это означает, что оно принадлежит двум уровням сразу! Похоже, система Тарского сама создает самоприменимость по отношению к метаязыкам!

Всю эту линию исследований в 1931 г. привел наконец к внезапному завершению (и к счастью, как считают некоторые) немецкий логик Курт Гёдель (1906—1978). Работая в Принстоне, Гёдель объяснил, почему самоприменимость является фактом человеческой жизни независимо от того, насколько сильно мы стараемся изгнать ее из наших логических систем. До Гёделя считалось, что каждое предложение логической системы может быть либо доказано, либо опровергнуто внутри этой системы. Но Гёдель поразил академический мир, показав, что это совсем не так! Он доказал, что логическая система неизбежно содержит предложение, которое является «истинным», но «недоказуемым». Доказательство Гёделя содержит слишком много технических деталей для того, чтобы обсуждать его здесь по-настоящему. Для наших текущих целей его можно перефразировать следующим образом:

Рассмотрим математическую систему T , которая является правильной в том смысле, что в ней не может быть доказано никакое ложное утверждение, и в то же время содержит утверждение S , объявляющее о своей собственной недоказуемости в этой системе. Можно сформулировать S просто как: «Я недоказуемо в системе T ». Каков статус истинности предложения S ? Если оно ложно, то верно противоположное предложение, а оно означает, что S доказуемо в системе T . Но это вступает в противоречие с нашим предположением, что в ней не может быть доказано никакое ложное утверждение. Поэтому мы

заключаем, что S должно быть истинным, из чего следует, что S недоказуемо в системе T , как и утверждается в S . Таким образом, S истинно, но недоказуемо в этой системе.

Американский создатель головоломок Рэймонд Смаллиан придумал следующую остроумную версию аргументации Гёделя:

Будем говорить, что логик является правильным, если все, что он может доказать, является истинным; ничего ложного он доказать не может.

Однажды правильный логик попал на остров рыцарей и плутов, каждый из обитателей которого был либо рыцарем, либо плутом, и рыцарь может делать только истинные утверждения, а мошенник только ложные утверждения. Логик встречает островитянина, и тот делает утверждение, из которого следует, что этот островитянин должен быть рыцарем, но логик никогда не сможет этого доказать!

Что это за утверждение?

«Гёделевское» утверждение гласит: *вы не можете доказать, что я рыцарь*. Говорящий является либо рыцарем, либо плутом. Предположим, что он лживый плут. А значит, и это его утверждение, конечно, ложно. Тогда должно быть истинным противоположное утверждение: *вы можете доказать, что я рыцарь*. Но говорящий не рыцарь, он плут. Поскольку головоломка утверждает, что правильный логик не может доказать что-либо ложное, он не может в этом случае доказать, что островитянин является рыцарем, как утверждает лживый плут! Поэтому говорящий сказал правду и не является плутом. Предположим тогда, что он является рыцарем. Это означает, что предложение *Вы не можете доказать, что я рыцарь* является истинным, поскольку говорящий теперь правдив. Но если это правда, то логик опять не может доказать, что этот островитянин является рыцарем, как утверждается в предложении. Поэтому даже если островитянин является рыцарем, логик никогда не сможет этого доказать!

Демонстрация Гёделя показала раз и навсегда, что логические системы «ошибочны», поскольку они неизбежно содержат утверждение («Я недоказуемо»), которое неразрешимо в них. Ее последствия для всей математики и философии ощущаются по сей день. Возможно, самый подходящий способ устранить самопримени-

мость, это просто объявить ее вне закона. «Техника» запрета на самом деле уже использовалась математиками по отношению к делению на 0. Почему? Потому что такое деление привело бы к противоречивым результатам (см. **противоречие** в глоссарии), как показывает следующий пример:

1. Предположим, что $a = b$.
2. Умножим обе части этого равенства на a : $a^2 = ab$.
3. Вычтем из обеих частей b^2 : $a^2 - b^2 = ab - b^2$.
4. Разложим обе стороны на множители: $(a - b)(a + b) = b(a - b)$.
5. Разделим обе части на $(a - b)$: $a + b = b$.
6. Поскольку $a = b$: из (1), (5) следует, что: $b + b = b$.
7. Поэтому: $2b = b$.
8. Разделив обе части на общий множитель b , получаем: $2 = 1$.

Мы доказали, что $2 = 1$, не так ли?

Эта аномалия возникла из-за того, что мы начали с предположения $a = b$, означающего, что $(a - b) = 0$:

$$a = b.$$

Вычтем b из обеих частей:

$$(a - b) = (b - b)$$

$$(a - b) = 0.$$

Таким образом, когда мы делим равенство $(a + b)(a - b) = b(a - b)$ на $(a - b)$, мы в действительности делим на 0. Причина для запрещения делить на 0, очевидно, практически лишь одна: лучше сохранить систему исчисления, которая оказалась в высшей степени полезной в повседневной жизни, чем полностью отбросить ее из-за того, что одно из чисел в ней является проблематичным. Жизнь в математике продолжается и без деления на ноль. Также и в логике жизнь будет продолжаться без самоприменимых утверждений.

В 1986 г. математик по имени Джон Барвайс и философ по имени Джон Этчемэнди в книге «Лжец» применили такой практический взгляд к парадоксу «Лжец». Как они утверждают, парадокс возникает только потому, что мы позволяем ему возникнуть. Когда Эпименид сказал «Все критяне лжецы», он мог проделать это просто для того, чтобы сбить с толку своих собеседников. Его утверж-

дение могло быть также результатом оговорки. Как бы то ни было, цель высказывания Эпименида может быть установлена только из оценки контекста, в котором оно было сделано, с учетом мотивов, побудивших его это сказать. Если все эти факторы учтены, парадокс не возникает.

Между прочим, основной результат Гёделя может пролить свет на то, почему некоторые проблемы не могут быть решены с помощью одной логики. Они на самом деле могут быть «неразрешимыми» в нашей системе логики. С одной из таких проблем мы столкнулись в задаче о четырех красках, которую мы обсудили в главе 5. Другим примером является предположение Гольдбаха. Математик Христиан Гольдбах (1690—1764) в письме Эйлеру в 1742 г. выдвинул предположение, что каждое четное целое число, большее 2, может быть записано в виде суммы двух простых чисел:

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 5 + 3$$

$$10 = 7 + 3$$

$$12 = 7 + 5$$

$$14 = 11 + 3$$

$$16 = 11 + 5$$

$$18 = 11 + 7$$

и т. д.

Из предположения Гольдбаха не известно никаких исключений. Гольдбах предположил также, что любое целое число, большее 5, может быть записано в виде суммы трех простых чисел:

$$6 = 2 + 2 + 2$$

$$7 = 2 + 2 + 3$$

$$8 = 2 + 3 + 3$$

$$9 = 3 + 3 + 3$$

$$10 = 2 + 3 + 5$$

$$11 = 3 + 3 + 5$$

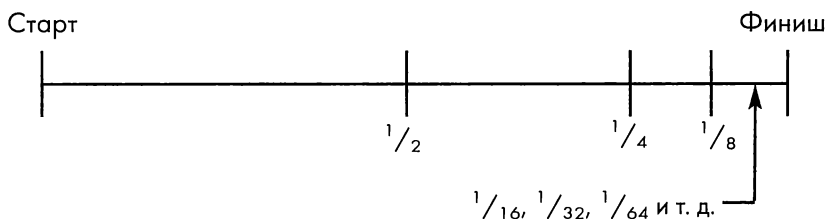
и т. д.

Может быть, это предположение как раз принадлежит к тем, которые неразрешимы в нашей логической системе. С точки зрения практической перспективы какое-либо «объяснение» этому предположению не так уж и необходимо, поскольку оно, видимо, не изменит мир сколько-нибудь существенным образом. Но по

каким-то причинам мы продолжаем искать доказательство, как будто фиванский Сфинкс вынуждает нас делать это, не важно какой ценой.

Пределы

Парадоксы не только в огромной мере повлияли на логические исследования, но также способствовали кристаллизации множества математических понятий. Одним из них является понятие **предела** (граничного числа или точки, к которой приближается функция), которое можно проследить во времени до знаменитого парадокса Зенона о бегуне, где он утверждал, что, если использовать логическую аргументацию, получается, что бегун никогда не сможет достичь линии финиша. Зенон объяснял это следующим образом. Бегун сначала должен пробежать половину расстояния до линии финиша. Затем в новом местоположении перед ним встает новая, но подобная задача: он должен опять пробежать половину нового расстояния между собой и линией финиша. Хотя последовательные половинные расстояния между ним и линией финиша будут все более уменьшаться (на самом деле бесконечно уменьшаться), коварный Зенон сделал из этого вывод, что бегун сможет подойти сколь угодно близко к линии финиша, но никогда не сможет ее пересечь. Последовательные дистанции, которые бегун должен преодолевать, образуют бесконечную геометрическую прогрессию, каждый член которой в два раза меньше предыдущего: $\{1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \dots\}$. Сумма членов этого ряда никогда не достигнет 1, длины всей дистанции, которую нужно пробежать:



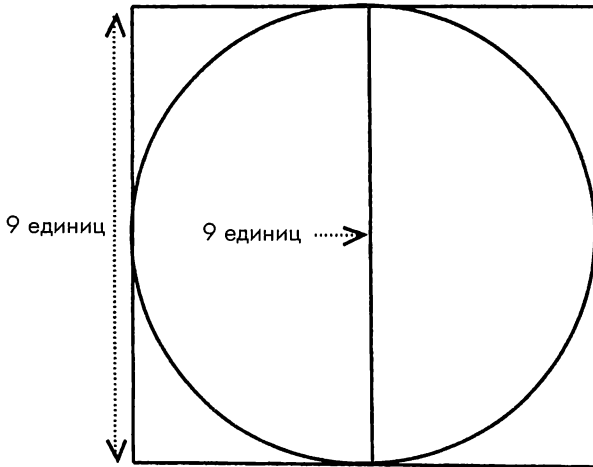
Английский ученый сэр Исаак Ньютон (1642–1727) и немецкий философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), возможно, рассматривали парадокс Зенона о бегуне, когда независимо пришли к оригинальному и замечательно простому его решению. Они просто объявили, что величина, к которой сходится сумма ряда $\{1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \dots\}$

при стремлении числа членов в нем к бесконечности, и является расстоянием между линией начала бега и линией финиша. Таким образом, *предел* движения бегуна на самом деле и есть полное расстояние длины 1. Это понятие стало основой для построения новой области математики, известной как **дифференциальное исчисление** и имеющей дело с такими понятиями, как скорость изменения, наклон кривой в некоторой точке и вычисление площади, ограниченной кривыми. Обсуждение исторических корней исчисления бесконечно малых привело к радикальному пересмотру философских и математических идей по всему миру. Разумеется, когда это исчисление было предложено впервые, оно встретило резкую критику со стороны философов и религиозных лидеров. Например, ирландский прелат и философ Джорж Беркли (1685–1753) нападал на эту науку за ее бесполезность, ибо она имеет дело с малыми, незначительными величинами. Но дифференциальное исчисление с легкостью выдержало эти атаки по той простой причине, что оно давало мощную концептуальную базу для разрешения классических нерешенных задач физики и парадоксов Зенона.

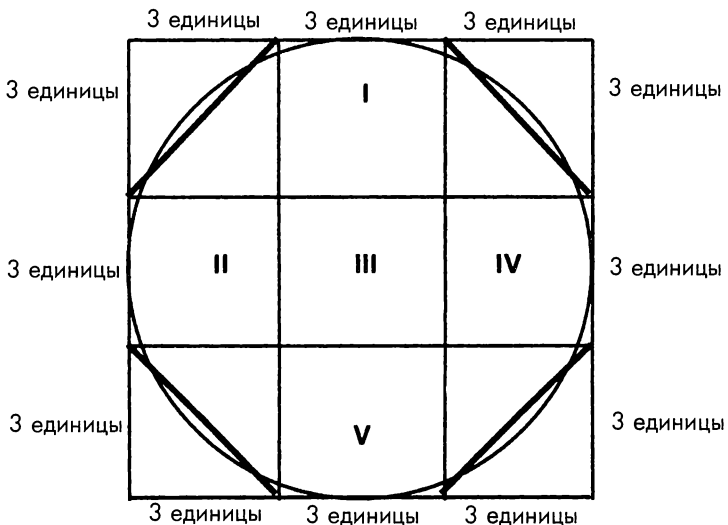
Идея предела не была совсем уж неизвестной до Ньютона и Лейбница. Эту идею можно обнаружить в древнеегипетском манускрипте, называемом *папирусом Ахмеса*, по имени египетского писца, скопировавшего его, или *папирусом Ринда*, по имени шотландского юриста и антиквара А. Генри Ринда (1833–1863), купившего его во время отпуска в Египте. Понятие предела использовано здесь для оценки числа π , или *пи*. Оригинал манускрипта был написан около четырех тысячелетий назад, в период, к которому относится и другой знаменитый документ египетских математиков, *московский папирус* (названный по месту его хранения). Папирус содержит восемьдесят четыре трудные математические задачи. Оценка числа π , отношения окружности круга к его диаметру, равная приблизительно $\frac{22}{7}$, или с пятью десятичными знаками 3,14159, находится в задаче 48.

Какова площадь круга, вписанного в квадрат со стороной 9 единиц?

Заметим, что диаметр круга тоже равен 9 единицам, как показано на рисунке. Умный Ахмес (или тот, кто был настоящим автором *папируса Ринда*) решил задачу методом, который содержал предчувствие техники перехода к пределу. По существу он задал вопрос: а что, если преобразовать круг в многоугольник? Продолжая, он раз-



делил каждую сторону квадрата ровно на три части, как показано на следующем рисунке, получив таким образом внутри него девять меньших квадратов (каждый площадью 3×3 квадратных единицы). Затем он нарисовал, как показано на рисунке, диагонали в угловых квадратах. С помощью такой модификации рисунка Ахмес получил восьмиугольник с площадью, по его предположению, достаточно близкой для практических целей к площади круга:



Теперь площадь восьмиугольника можно вычислить точно, поскольку он составлен из семи маленьких квадратов (все одной площади), а именно, пяти внутренних квадратов (I, II, III, IV, V), плюс половинки от четырех маленьких угловых квадратов, что, конечно, эквивалентно двум квадратам. Площадь одного маленького квадрата равна $3 \times 3 = 9$ квадратных единиц. Общая площадь семи таких квадратов поэтому равна $9 \times 7 = 63$ квадратные единицы. Немного смощенничав для удобства, неистощимый Ахмес предположил, что площадь восьмиугольника, а значит, и площадь круга равна 64. Затем он оценил значение π следующим образом. Вспомним, что диаметр круга равен 9:

Площадь круга: $\pi r^2 = 64$

Диаметр: 9

Радиус (r): $9/2$

Поэтому $r^2 = (9/2)^2 = 20,25$

Так как $\pi r^2 = 64$, а $r^2 = 20,25$, то $20,25\pi = 64$. Деля обе стороны на 20,25, находим, что $\pi = 64/20,25$. Это эквивалентно тому, что $\pi = 3,16049\dots$

Поразительно похожей догадкой воспользовался спустя тысячелетие великий сицилийский математик Архимед (около 287–212 до Р.Х.). Архимед вписывал в круг правильный многоугольник. Разницу между периметром многоугольника и окружностью круга, утверждал он, можно сделать сколь угодно малой, последовательно увеличивая число сторон многоугольника. Предельной фигурой такой процедуры, уменьшающей стороны многоугольника, является круг, а пределом площади «бесконечностороннего» многоугольника является поэтому площадь круга. Никто и никогда не сможет вычислить площадь круга точно, заметил Архимед, но, очевидно, можно получить ее приближенное значение с любой желаемой точностью. Из этого приближения можно вывести значение числа π . Конечно, можно себе представить мир, в котором число π неизвестно. Но наши современные знания о круговых и периодических объектах в мире, таких как солнце и морские приливы, находились бы в гораздо более зачаточной форме. Наши способности описывать явления природы были бы сведены к концепциям зародышевых размеров.

ФУНКЦИИ

Термин **функция** используется в математике для указания связи между двумя или более переменными.

Предположим, что функция $y = f(n)$ (читается как «у является функцией n») имеет вид $f(n) = 1/n$. Таким образом: $y = f(n) = 1/n$.

Теперь мы всегда можем определить значение y , просто фиксируя величину n .

Примеры:

При $n = 2$,

$$y = f(n) = 1/n = 1/2.$$

При $n = 3$,

$$y = f(n) = 1/n = 1/3.$$

При $n = 1\,000\,000$,

$$y = f(n) = 1/n = 1/1\,000\,000.$$

Поскольку величина y зависит от величины n , y называют **зависимой переменной**, а n **независимой переменной**.

Величина, к которой Архимед приблизился с помощью вычислений, использующих вписанные многоугольники, является превосходным примером предела. Можно приближаться к пределу $\pi = 3,14159\dots$ все ближе и ближе, увеличивая число сторон многоугольника до бесконечности. Пределы дают возможность увидеть, как ведут себя функции (см. выноску). Следующая формула выражает в символической форме, что функция $(1/n)$ стремится к пределу 0, когда n становится все больше и больше:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0.$$

Эта формула читается следующим образом: «Предел функции $(1/n)$ при n стремящемся к бесконечности (т. е. когда n становится все больше и больше) равен 0».

Исчисление бесконечно малых является, по существу, способом вычисления пределов как меры изменений событий (скорости дви-

жения и т. д.): сколь быстро будет падать камень через две секунды после того, как он был сброшен с утеса? Какой будет его скорость в любой момент времени? Оно стремится определить величину, определяя скорость, с которой она изменяется.

Заключительные замечания

Парадокс «Лжец», несмотря на все радикальные последствия, привнесенные им в развитие математики, совершенно не препятствует использованию логики в повседневной жизни. В нашем трехмерном мире, например, если верно, что здание А выше здания В, а здание С выше здания А, то без тени сомнения можно заключить, что здание С выше здания В. Тем не менее парадокс «Лжец» продолжает предостерегать нас против веры в то, что логика является единственной формой познания. Интуиция и опыт важны для проникновения в природу вещей, видимо, в той же, если не в большей мере.

Тем не менее уместно заметить, что само понятие «логика» возникло не в мире математики, а в гораздо более мистической области. Еще в Греции VI века до Р.Х. философ Гераклит утверждал, что миром правит Логос, божественная сила, несущая порядок в поток бытия. Вскоре после этого Логос стали считать рациональной божественной силой, которая управляет Вселенной. Благодаря способности мыслить все человеческие существа считались к ней причастными. Даже Евангелие от Иоанна определяет Логос («Слово») как духовную силу: «В начале было Слово, и Слово было у Бога, и Слово было Бог». Лишь много позже на Логос стали смотреть, как на способность человеческого интеллекта исследовать мир.

Упражнения

Логика

Следующие задачи предназначены для того, чтобы дать возможность читателю самостоятельно исследовать природу логического мышления. Все они являются вариантами классических логических головоломок и парадоксов.

60. На листе бумаги написано следующее: «Это предложение ложно». Истинно ли это предложение?

61. Золотая монета находится в одном из трех ящиков, на каждом из которых, как показано ниже, имеется надпись:

А Монета здесь	Б Монета не здесь	В Монета не в А
--------------------------	-----------------------------	---------------------------

Можете ли вы сказать, где монета, если, по крайней мере, одна из надписей верна.

62. На шкатулке написано следующее:

Эту шкатулка не сделана человеком,
говорящим правду.

Кто сделал шкатулку, человек, говорящий правду или лжец?

63. Предположим, что $x + y = y$. Подставим теперь вместо x и y некоторые указанные ниже величины.

Если $x = 0$ и $y = 1$, то

$$x + y = y$$

$0 + 1 = 1$, что, очевидно правильно.

Если $x = 1$ и $y = 2$, то

$$x + y = y$$

$1 + 2 = 2$, что, очевидно неправильно.

Как это может быть?

64. Верно ли следующее утверждение? «В этом утверждении семь слов.» Каково противоположное утверждение? Верно ли оно?

65. Человек смотрит на фотографию: «У меня нет братьев и сестер, но сын этого человека сын моего отца». Кто изображен на фотографии?

66. Первый покупатель книжного магазина в Милуоки дал продавцу 10-долларовую банкноту за книгу стоимостью 3 доллара. У продавца не было сдачи, и он пошел в магазин музыкальных записей

напротив, чтобы разменять банкноту на десять банкнот по 1 доллару. Продавец дал покупателю книгу стоимостью три доллара и семь банкнот по 1 доллару сдачи.

Час спустя продавщица из магазина музыкальных записей вернула 10-долларовую банкноту и потребовала свои деньги обратно, заявив, что банкнота фальшивая. Чтобы избежать скандала, продавец книжного магазина решил отдать ей десять банкнот по 1 доллару, приняв назад фальшивую банкноту. Это означает, что продавец книжного магазина потерял 3 доллара (= стоимость книги) плюс 10-долларовую банкноту, которую он дал продавщице магазина музыкальных записей. Итого он потерял 13 долларов. Но во всех операциях участвовало лишь 10 долларов. Можете ли вы объяснить это?

67. Трем женщинам, прежде чем завязать им глаза, сообщили, что каждой из них нарисуют на лбу либо красный, либо синий крест. Когда повязки сняли, каждой женщине предложили поднять руку лишь в случае, если она увидит красный крест, и опустить руку, когда она выяснит цвет своего собственного креста. И вот что произошло на самом деле. Трем женщинам завязали глаза и на лбу каждой из них нарисовали красный крест. Повязки сняли. Посмотрев друг на друга, три женщины подняли руки одновременно. Через некоторое время одна из женщин опустила руку и сказала: «Мой крест красного цвета». Как ей удалось это выяснить?

68. Три женщины решили провести отпуск на курорте во Флориде. Они сняли комнату в отеле, который в целях рекламной акции установил за проживание цены 1920-х годов. Женщины заплатили по 10 долларов каждая, или 30 долларов на всех. Просматривая гостевой лист, менеджер отеля обнаружил, что допустил ошибку и взял с посетительниц слишком много. Комната, в которой они проживали, стоила лишь 25 долларов. Поэтому он дал коридорному 5 долларов, чтобы тот вернул их дамам. Жуликоватый коридорный знал, что разделить 5 долларов поровну на три части нельзя. Поэтому он прикарманил 2 доллара и вернул женщинам только по одному доллару.

И вот загадка. Каждая из женщин заплатила первоначально 10 долларов и получила назад 1 доллар. Поэтому на самом деле каждая из женщин заплатила за комнату 9 долларов. Все три вместе заплатили, таким образом, $9 \times 3 = 27$ долларов. Если мы добавим к этой

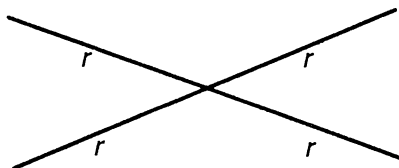
величине 2 доллара, которые прикарманил нечестный коридорный, мы получим всего 29 долларов. А женщины заплатили первоначально 30 долларов! Куда делся 1 доллар?

Пределы

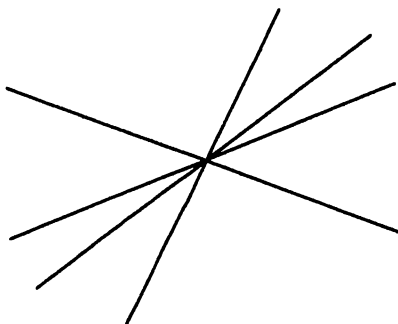
69. Рассмотрите отношение последовательных пар чисел Фибоначчи. Выразите в виде предела число, к которому это отношение стремится:

$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, \dots\}$.

70. Нарисуйте два равных пересекающихся отрезка так, чтобы они делили друг друга пополам. Пометьте равные сегменты отрезков буквой r , означающей их длину.



Продолжайте добавлять на рисунок отрезки, проходящие через точку пересечения двух первых отрезков и равные им по длине. Каждый из рисуемых отрезков должен делиться точкой пересечения на две равные части длины r :



Какая фигура получается, если продолжать эти действия до бесконечности? Можете ли вы доказать это?



Магический квадрат Ло Шу

Никто до пифагорейцев не думал,
что в математических связях хранит свои
секреты Вселенная. Двадцать пять веков спустя
их наследие остается благословением
и проклятием Европы.

АРТУР КЕСТЛЕР (1905–1983)

Размещение первых девяти целых чисел в клетки квадрата так, чтобы суммы чисел в каждом ряду, строке и диагонали были одинаковыми, называют в Китае Ло Шу. Эта магическая схема была открыта четыре тысячи лет назад. Китайцы всегда ощущали, что она обладает мистическими свойствами. До сего дня считается, что если повесить ее над входом жилища или комнаты, то она будет служить защитой от дурного глаза. Каждая гадалка использует ее для предсказания будущего. Амулеты и талисманы часто содержат изображение Ло Шу.

Известный в Англии под названием «магический квадрат», во II веке нашей эры Ло Шу распространился в другие страны света. Греческий математик Мануил Мосхопул познакомил с ним Европу около 1300 года. Изобретение магических квадратов различных

видов вскоре после этого стало настоящей манией. Как и китайцы, средневековые астрологи находили в них оккультные свойства и использовали при составлении гороскопов. Они также рассматривали их как зашифрованные тайным кодом послания из космоса. Например, выдающийся астролог Корнелиус Агриппа (1486–1535) верил, что магический квадрат из одной ячейки (квадрат, содержащий единственную цифру 1) есть представление вечного совершенства Бога. Тот факт, что магический квадрат 2×2 построить невозможно, Агриппа считал доказательством того, что четыре элемента, воздух, земля, огонь и вода, несовершенны.

Но смысл Ло Шу проявляется не только в царстве мистики. Магический квадрат имел следствиями множество прозрений в природу чисел и создание математических техник. В этом отношении понятие алгоритма можно считать особенно важным. Алгоритмом называется техника, которая призвана «регуляризировать» решение некоторых частных задач или совокупностей задач. Поэтому, учитывая важность этой области математических методов, первоначальный магический квадрат определенно принадлежит к списку десяти величайших головоломок всех времен.

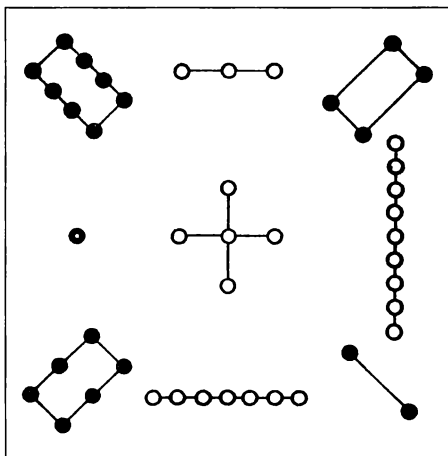
Головоломка

Одна из версий истории Ло Шу сообщает примерно следующее. В Древнем Китае случилось страшное наводнение. Люди должны были приносить жертвы богине реки Ло, чтобы утешить ее гнев. Однако каждый раз случалось лишь то, что из реки выползала черепаха и равнодушно обходила каждую жертву. Люди считали эту черепаху посланницей богини реки, которая, как они думали, отвергала их жертву. Однажды ребенок заметил на панцире черепахи квадрат. На нем были изображены девять первых цифр, размещенные в три строки и три столбца. Ребенок заметил также, что числа в каждом столбце, строке и на двух диагоналях неизменно в сумме дают 15. И люди поняли, что это число жертв, которое они должны принести богине реки, чтобы умиротворить ее.

По другой версии истории Ло Шу император Великий Юй, гуляя вдоль берега реки Ло, увидел выползающую из воды таинственную черепаху. На ее панцире в квадрате были размещены девять первых цифр. Как и ребенок, Юй заметил, что числа в квадрате об-

разуют схему, описанную выше, и пришел к выводу, что это размещение является посланием от богов.

Как бы то ни было на самом деле, первоначально Ло Шу был квадратом, составленным из девяти первых чисел $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, расположенных так, что числа в каждом столбце, строке и на двух диагоналях в сумме дают 15. Это число известно как **постоянная магического квадрата**. На рисунке изображен Ло Шу в своей первоначальной форме с числами в виде фигур (линий, точек и кружочков).



С цифрами в десятичной форме он выглядит так:

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Строки

$$8 + 3 + 4 = 15$$

$$1 + 5 + 9 = 15$$

$$6 + 7 + 2 = 15$$

Столбцы

$$8 + 1 + 6 = 15$$

$$3 + 5 + 7 = 15$$

$$4 + 9 + 2 = 15$$

Диагонали

$$8 + 5 + 2 = 15$$

$$4 + 5 + 6 = 15$$

В качестве частного случая магического квадрата, Ло Шу известен как магический квадрат «порядка 3», термин, указывающий число ячеек в квадрате (3×3). Квадрат (4×4) называется магическим квадратом «порядка 4», квадрат (5×5) называется магическим квадратом «порядка 5», и так далее. Вообще квадрат $n \times n$ ($= n^2$) называется магическим квадратом «порядка n ».

Числа в Ло Шу можно расположить и несколькими другими способами, чтобы получить 15 в качестве постоянной магического квадрата. Вот еще два расположения:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Существует ли метод конструирования магических квадратов? Не есть ли это просто метод проб и ошибок? Прежде всего, определено было бы полезным, если бы у нас была общая формула для определения постоянной магического квадрата. Магический квадрат строится из ряда последовательных целых чисел, организованных в квадратную схему. Последним числом ряда является поэтому n^2 , где n — порядок квадрата. Например, Ло Шу состоит из последовательных целых чисел от 1 до 9, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Последним числом является 9 или 3^2 , где 3 — порядок квадрата, поскольку он называется магическим квадратом 3×3 , или «порядка 3». Подобным же образом в магическом квадрате «порядка 4» последнее число равно $4^2 (= 16)$; в магическом квадрате «порядка 5» оно равно $5^2 (= 25)$; и так далее. В магическом квадрате «порядка n » последнее число равно n^2 . Пользуясь нашей техникой суммирования (глава 3), мы можем найти подходящую формулу для суммы чисел магического квадрата:

$$\begin{array}{l} \text{Сумма } n \text{ чисел:} \\ \frac{n(n+1)}{2} \\ \downarrow \end{array}$$

$$\text{Сумма } n^2 \text{ чисел в магическом квадрате: } \frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

Все, что необходимо было сделать, это заменить n в общей формуле на n^2 :

$$\begin{array}{l} \text{Сумма } n \text{ чисел:} \\ \frac{n(n+1)}{2} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Сумма } n^2 \text{ чисел:} \\ \frac{n^2(n^2+1)}{2} \end{array}$$

$$n^2 (n^2 + 1)$$

Если $(n^2 + 1)$ умножить на n^2 , результатом будет $(n^4 + n^2)$:
 $n^2 (n^2 + 1) = (n^4 + n^2)$.

Вот как шаг за шагом выполняется это умножение:

1. n^2 умножается на первый член выражения $(n^2 + 1)$.
 Этот член равен n^2 . Результат: $n^2 \times n^2 = n^4$.
2. n^2 умножается на второй член выражения $(n^2 + 1)$.
 Этот член равен 1. Результат: $n^2 \times 1 = n^2$.
3. Эти два результата складываются вместе: $(n^4 + n^2)$.

Давайте упростим эту формулу (см. выноску, если вы забыли математику старших классов):

$$\frac{n^2 (n^2 + 1)}{2} = \frac{(n^4 + n^2)}{2}.$$

Применим эту формулу к Ло Шу, где $n = 3$:

$$\frac{(n^4 + n^2)}{2} = \frac{(3^4 + 3^2)}{2} = \frac{90}{2} = 45.$$

Это сумма целых чисел в квадрате 3×3 . Если мы разделим эту сумму (45) на 3, то получим постоянную магического квадрата: $45 : 3 = 15$. Вообще постоянную магического квадрата можно получить путем деления суммы чисел в квадрате на n :

Сумма чисел в магическом квадрате: $\frac{n^2 (n^2 + 1)}{2}$.

Разделив ее на n получаем: $\frac{n^2 (n^2 + 1)}{2n}$.

Это выражение можно упростить следующим образом:

$$\frac{n^2 (n^2 + 1)}{2n} = \frac{n \times n (n^2 + 1)}{2n} = \frac{n (n^2 + 1)}{2}.$$

Теперь у нас есть общая формула. Давайте посмотрим, как она работает в случае Ло Шу. Подставляя $n = 3$, получаем:

$$\frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{3(3^2+1)}{2} = \frac{3(10)}{2} = \frac{30}{2} = 15.$$

Как можно видеть, эта формула действительно порождает постоянную магического квадрата. Есть ли что-нибудь еще, облегчающее процедуру конструирования магических квадратов? Рассмотрим снова Ло Шу. Заметим, что это квадрат «нечетного порядка», квадрат, составленный из нечетного количества целых чисел. Все квадраты нечетных порядков имеют средние ячейки. И число, которое заполняет эту ячейку, можно определить, выяснив, на скольких строках, столбцах и диагоналях квадрата оно расположено. В случае Ло Шу оно расположено на одной строке, одном столбце и двух диагоналях (в сумме четыре).

Теперь заметим, что существует восемь возможных троек чисел (составленных из первых девяти целых чисел), дающих в сумме 15:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

$$9 + 5 + 1 = 15$$

$$9 + 4 + 2 = 15$$

$$8 + 6 + 1 = 15$$

$$8 + 5 + 2 = 15$$

$$8 + 4 + 3 = 15$$

$$7 + 6 + 2 = 15$$

$$7 + 5 + 3 = 15$$

$$6 + 5 + 4 = 15$$

Мы установили, что число в середине входит в четыре таких тройки. Единственным числом, которое появляется в предыдущем списке четыре раза, является 5:

$$9 + 5 + 1 = 15$$

$$8 + 5 + 2 = 15$$

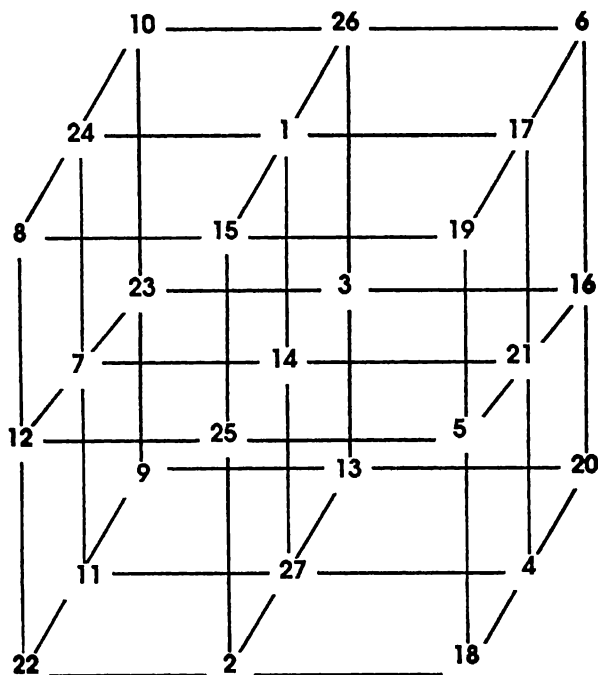
$$7 + 5 + 3 = 15$$

$$6 + 5 + 4 = 15$$

Таким способом мы установили число в середине. Подобный ход мыслей приложим и к магическим квадратам возрастающих нечетных порядков.

Математические комментарии

Хотя квадрат является древнейшей и наиболее распространенной формой, создавались и другие формы магических фигур. Например, сконструирован магический куб с цифрами, расположенными в кубической форме так, что каждый ряд чисел, идущий параллельно одному из ребер, а также одной из четырех больших диагоналей, имеет одну и ту же магическую постоянную. В изображенном ниже магическом кубе эта константа, как читатель может убедиться самостоятельно, равна 42:



Магические фигуры сами по себе проливают свет на структуру чисел. Как таковые они представляют собой упражнение в «чисто» математическом мышлении.

АЛЬБРЕХТ ДЮРЕР (1471–1528)

Дюрер родился в Нюрнберге, в Германии. Его искусство и теоретические работы глубоко повлияли на художников XVI века. Он особенно прославился тем, что, используя технику вариаций темных и светлых тонов, создавал в своей живописи иллюзию трехмерных форм. По этой причине его считают одним из создателей перспективы в живописи.

«Магические» числовые схемы

Для того чтобы увидеть, что таят в себе магические квадраты, давайте взглянем на один из самых знаменитых квадратов всех времен, квадрат Дюрера, квадрат, привлечший внимание столь многих математиков, что одно перечисление их имен потребовало бы нескольких страниц текста. Он назван по имени своего создателя, великого немецкого художника времен Реформации Альбрехта Дюрера. Дюрер включил этот квадрат в свою знаменитую гравюру «Меланхолия», созданную в 1514 г. Примерно через два века после этого шведский математик Леонард Эйлер (глава 4) был настолько заворожен им, что сам придумал сорок восемь вариантов этого квадрата. Квадрат Дюрера является квадратом «порядка 4», состоящим из первых четырнадцати чисел. Его постоянная магического квадрата равна 34.

Выведенная нами ранее формула постоянной магического квадрата имеет вид

$$\frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

$$n = 4.$$

Поэтому

$$\frac{n(n^2 + 1)}{2} = \frac{4(4^2 + 1)}{2} = \frac{4(16 + 1)}{2} = \frac{4(17)}{2} = 34.$$

Этот квадрат имеет много «магических» свойств. Например, вдобавок к появлению в каждой строке, столбце и диагонали постоянная магического квадрата 34 появляется также в следующих случаях:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

- в сумме цифр из четырех углов ($16 + 13 + 4 + 1 = 34$)
- в сумме четырех цифр в центре ($10 + 13 + 6 + 7 = 34$)
- в сумме цифр 15 и 14 в нижней строке и цифр 3 и 2 напротив них в верхней строке ($15 + 14 + 3 + 2 = 34$)
- в сумме цифр 12 и 8 в правом столбце и цифр 9 и 5 напротив них в левом столбце ($12 + 8 + 9 + 5 = 34$)
- в сумме цифр каждого из четырех угловых квадратов: $16 + 3 + 5 + 10 = 34$; $2 + 13 + 11 + 8 = 34$; $9 + 6 + 4 + 15 = 34$; $7 + 12 + 14 + 1 = 34$)

Этот квадрат содержит много других интересных схем. Для того чтобы обсудить их, потребовался бы целый трактат. Квадрат Дюрера не был первым из изобретенных квадратов порядка 4. Археологи обнаружили один из них, высеченный в XII веке в Каджабуро, Индия:

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Он известен как «дьявольский» квадрат, поскольку сохраняет свои магические свойства, если передвинуть нижнюю строку с одной стороны на другую (вверх). Между прочим, существует 880 головоломных способов сконструировать магический квадрат порядка 4.

Магический квадрат порядка 5 (имеющий постоянную магического квадрата 65) допускает намного больше возможных расположений цифр, а именно, 275 305 224! Вот один из них:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Возможно, самым необычным из всех магических квадратов был квадрат порядка 8, созданный Бенджамином Франклином (1706–1790), великим американским общественным деятелем, писателем, ученым и издателем:

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Составленный из первых шестидесяти четырех цифр, квадрат Франклина содержит множество удивительных числовых странностей, например, следующих:

- ▶ Его постоянная магического квадрата равна 260; а постоянная магического квадрата для каждого из четырех квадратов 4×4 , являющихся квадрантами большого квадрата, равна в точности половине этого числа, 130.
- ▶ Сумма любых четырех чисел, находящихся на одинаковом расстоянии от центра, тоже равна 130.
- ▶ Сумма чисел в четырех углах плюс сумма четырех центральных чисел равна 260.
- ▶ Сумма четырех чисел, образующих любой маленький квадрат 2×2 внутри большого квадрата, равна 130.
- ▶ Есть еще много других странностей.

Попытка понять, как Франклину удалось изобрести этот шедевр, буквально приводит в ступор. Между прочим, Леонард Эйлер создал свою, поистине магическую версию квадрата порядка 8. Четыре составляющих его квадранта имеют постоянную магического квадрата, равную 130, как и в квадрате Франклина. Но уникальное свойство квадрата Эйлера состоит в том, что если вы возьмете шахматного коня, который движется по шахматной доске по L-образному пути, и начнете путь из клетки, содержащей 1, в верхнем левом углу квадрата, то вы посетите каждую цифру от 1 до 64 один и только один раз!

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Алгоритмы

Исследования магических квадратов оказали значительное влияние на развитие концепции алгоритма. Алгоритм определяется как пошаговый метод решения задач специального вида. Конструиро-

АЛГОРИТМЫ

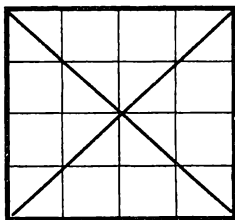
Алгоритм — это систематическая техника, используемая при решении задач, которое требует последовательных шагов.

Вот алгоритм для надевания ботинок и носков:

1. Наденьте носки в любом порядке на любую ногу.
2. Наденьте два ботинка симметричным способом: левый ботинок на левую ногу, правый ботинок на правую ногу.
3. Шаги один и два нельзя переставлять.

вание магических квадратов по большей части является делом проб и ошибок. Однако для некоторых случаев можно разработать алгоритм. В крайнем случае можно попытаться выяснить, производит он магический квадрат, или нет.

Вот алгоритм построения квадрата порядка 4. Сначала нарисуем пересекающиеся линии по диагоналям:



Далее запишем числа, как если бы они шли подряд, пропуская клетки, через которые проходят пересекающиеся линии. Начнем с 1, которую следовало бы поместить в верхней левой клетке. Поскольку клетку пересекает диагональ, оставляем ее пустой. Переходим к следующей клетке справа. Поскольку она свободна, впишем в нее следующее число, 2. Третья клетка тоже свободна, поэтому помещаем в ней цифру 3. Четвертая клетка занята, поэтому оставляем ее пустой. Продолжаем в том же духе, пока не достигнем последней клетки в правом нижнем углу.

	2	3	
5			8
9			12
	14	15	

Теперь начнем с правого нижнего угла и будем двигаться по строкам налево, записывая в клетки только те цифры, которые были пропущены из-за диагональных линий. Итак, начнем с того, что поместим в правый нижний угол 1. Следующие две клетки уже заполнены. Когда мы достигаем клетки в левом нижнем углу, помещаем в нее следующее число, являющееся числом 4, поскольку числа 2 и 3 уже использованы. И так далее.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Тот же алгоритм можно использовать для создания магических квадратов порядка 8. Построение таких квадратов мы оставляем в качестве упражнения в соответствующем разделе.

Считается что еще один алгоритм для построения магических квадратов нечетного порядка (квадратов порядка 3, 5, 7 и т. д.) создал в 1693 г. математик Симон де ла Лубер (1642–1729), хотя, возможно, он узнал о нем во время своего путешествия в Азию. Давайте применим его алгоритм к магическому квадрату порядка 5, квадрату, составленному из двадцати пяти чисел, с постоянной магического квадрата, равной 65:

1. Поместим 1 в центральную верхнюю ячейку:

		1		

2. Продолжим действие по диагонали направо вверх и поместим следующую цифру 2 в воображаемую клетку вне наличного квадрата. Поскольку 2 находится вне квадрата, перенесем ее на дно столбца, находящегося с этой клеткой на одной линии:

			2	
		1	↓	
			↓	
			↓	
			↓	
			2	

3. Поместим следующую цифру 3 направо вверх по диагонали от 2:

			2		
		1	↓		
			↓		
			↓		
			↓	3	
			2		

4. Пользуясь тем же движением по диагонали направо вверх, внесем 4 в воображаемую клетку справа от 3 и перенесем ее на противоположный конец строки.

			2		
		1			
4	←	←	←	←	4
				3	
			2		

5. Поместим 5 направо вверх по диагонали от 4:

			2		
		1			
	5				
4					4
				3	
			2		

6. Для того чтобы внести цифру 6, нельзя продолжить тот же способ движения, поскольку клетка направо вверх по диагонали от 5 уже занята. Поэтому 6 записывается под 5.

			2	
		1		
	5			
4	6			4
				3
			2	

7. Продолжаем заполнять квадрат дальше таким же способом (читателю предлагается проделать это самостоятельно):

	18	25	2	9	
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

Между прочим, мы можем начать с помещения 1 в любую клетку. Однако это породит квадрат, в котором магическими будут только строки и столбцы, но не диагонали.

Заключительные замечания

Хотя магические квадраты и не имеют практических приложений, тем не менее они интересны сами по себе, поскольку побуждают нас думать о числовых схемах в «чистом» виде. И кто знает, в один прекрасный день мы сможем обнаружить, что магические квадраты дали всходы в природе и деятельности человека, подобно числам Фибоначчи.

Магические квадраты дают ключ к пониманию того, почему на заре истории математика и магия в значительной степени перекрывались. В своих истоках обе они искали одного и того же, разгадки числовых схем. В античные времена не видели разницы между *исчислением* и *нумерологией* (наука, изучавшая подразумеваемые божественные свойства чисел). Нумерология берет начало от пифагорейцев, которые полагали, как мы уже упоминали, что числа — это язык космоса. Древние израильтяне придерживались сходных верований, создав искусство **гематрии** на основе того взгляда, что буквы любого слова или имени можно интерпретировать как цифры и преобразовать в форму числа, которое содержит тайное послание. Самое раннее зарегистрированное использование гематрии на самом деле произошло в VIII веке до Р.Х., когда царь Вавилона Саргон II выстроил стену города Хорсбад длиной ровно 16 283 кубитов, потому что это число было нумерологическим значением его имени.

Как выясняется, квадрат Ло Шу тоже имеет скрытые свойства, что создает ему поистине нумерологический ореол. Например, если заменить цифры в клетках Ло Шу в соответствии с порядком, задаваемым их значениями, числами Фибоначчи, начиная от 3 и до 144, {3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144}, получится, как показано ниже, новый квадрат:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

→

89	3	34
8	21	55
13	144	5

Начальные числа
магического квадрата

1
2
3
4
5
6
7
8
9

Замена числами
Фибоначчи

3
5
8
13
21
34
55
89
144

Новый квадрат обладает следующим свойством: сумма произведений чисел в трех строках равна сумме произведений чисел в трех столбцах.

Произведения чисел в строках		Произведения чисел в столбцах	
$89 \times 3 \times 34$	$= 9078$	$89 \times 7 \times 13$	$= 9256$
$8 \times 21 \times 55$	$= 9240$	$3 \times 21 \times 144$	$= 9072$
$13 \times 144 \times 5$	$= \underline{9360}$	$34 \times 55 \times 5$	$= \underline{9350}$
Сумма:	27 678	Сумма:	27 678

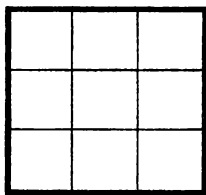
Каково бы ни было значение этого удивительного результата, он наполняет Ло Шу даже большей мистической энергией, чем та, которую в нем осознавали ранее. Между прочим, лишь по прошествии эпохи Возрождения нумерология получила статус псевдонауки. Парадоксально, но в эпоху Возрождения интерес к древнему оккультному искусству и его связи с математическими исследованиями первоначально поддерживался. Однако римская католическая церковь и новый протестантизм в XV и XVI столетиях резко выступили против него. В результате математика перестала кутаться в покрывало мистической символики, как это было в Древнем мире.

Но связь между магией, символизмом и математикой едва ли удалось порвать. Математические схемы продолжают насыщать на нас свои «магические чары». Можно написать толстый том о множестве значений, приписываемых определенным числам на протяжении всей истории во всех частях мира. Люди склонны считать, что определенные вещи, такие как даты, номера домов или некоторые отдельные числа, имеют огромное значение. Умами человеческих существ, по-видимому, овладела точка зрения пифагорейцев, что сам мир является магическим узором из маленьких чисел, организованных в схемы.

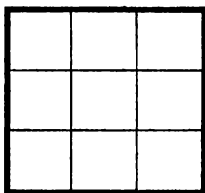
Упражнения

Магические квадраты

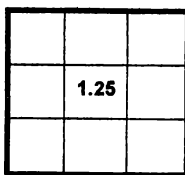
71. Можете ли вы построить из первых девяти четных чисел {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18} магический квадрат порядка 3? Какова его магическая постоянная?



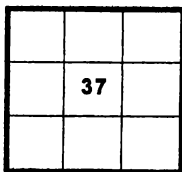
72. Можете ли вы построить из следующих чисел {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} магический квадрат порядка 3? Какова его магическая постоянная.



73. Можете ли вы построить из следующих десятичных чисел {0,25, 0,50, 0,75, 1,00, 1,25, 1,50, 1,75, 2,00, 2,25} магический квадрат порядка 3? Постоянная магического квадрата равна 3,75. В центральной клетке 1,25.



74. Следующий крепкий орешек обязан своим появлением великому британскому изобретателю головоломок Генри Э. Дьюдени. Можете ли вы построить из следующих девяти простых чисел {1, 7, 13, 31, 37, 43, 61, 67, 73} магический квадрат порядка 3? Постоянная магического квадрата равна 111.



75. Следующая головоломка обязана своим существованием другому великому британскому изобретателю головоломок, Льюису Кэрроллу, который бросил вызов энтузиастам головоломок, используя почтовые сборы своего времени. В викторианские времена почтовые сборы выражались в половинных единицах. Можете ли вы построить из следующих стоимостей почтовых марок $\{1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5\}$ магический квадрат порядка 3? Какова его магическая постоянная?

	3d	

76. Теперь попробуйте свои силы в построении магического квадрата порядка 4 с постоянной магического квадрата равной 102. Это трудная головоломка. Пройгнорируйте ее, если вы слишком утомились. Чтобы помочь вам, некоторые из клеток я уже заполнил. Более того, заметьте, что наименьшее число равно 1, а наибольшее равно 71, причем все числа (кроме 1) простые.

	71		23
53	11		
29			47

Алгоритмы

77. Сконструируйте квадрат порядка 8, используя описанный в этой главе алгоритм для квадрата порядка 4.

78. Можете ли вы произвести алгоритм для магического квадрата порядка 3, пользуясь идеями, обсуждавшимися в этой главе?



Критский лабиринт

Сегодня мы являемся свидетелями гигантского спектакля, в котором бесчисленные человеческие жизни заблудились в собственных лабиринтах, потому что им нечему себя посвятить.

ХОСЕ ОРТЕГА-И-ГАССЕТ (1883–1955)

Если бы нам пришлось проникнуть в камеры захоронения древних пирамид, таких как пирамиды Гизы в Египте, мы невольно были бы поражены таинственной системой проходов, переплетающихся внутри них. Несомненно, архитектура этих гробниц была задумана так, чтобы побудить души умерших найти «единственный верный путь» после смерти. Строения, спроектированные таким способом, были названы **лабиринтами**. В то время как мистицизм, по-видимому, поблек, концепцию лабиринта тем не менее продолжают использовать для того, чтобы создавать различного рода вызовы. Например, психологи используют лабиринты, чтобы оценивать способность к решению задач как у животных, так и у людей. Игрушечные лабиринты находятся среди самых популярных игр, которые сегодня дарят детям, главным образом потому, что они считаются полезными для развития логического мышления и в то же время являются развлечением.

Первым из известных лабиринтов была тюрьма, выстроенная на острове Крит. Согласно легенде, эту архитектурную головоломку спроектировал для критского царя Миноса бежавший из Афин Дедал, изготовивший крылья из перьев. Минос построил эту подземную тюрьму, чтобы отомстить за смерть своего сына Андрогеея, погибшего от рук группы неизвестных афинян. К несчастьям царя добавилось то, что его жена Пасифая влюбилась в быка и родила от него чудовище, получеловека, полубыка, названное Минотавром (буквально, «бык Миноса»). От стыда за это событие и стремясь отомстить Афинам, Минос каждые девять лет отправлял в эту тюрьму по семь молодых афинских юношей и девушек. В центре он поместил ненасытного Минотавра, жаждавшего разорвать любого, кто осмеливался туда войти. Тесей, сын афинского царя Эгея, вызвался стать одним из тех, кто был предназначен в жертву. По иронии судьбы умная дочь Миноса Ариадна влюбилась в Тесея. Поэтому она дала своему возлюбленному меч, чтобы убить Минотавра, и клубок ниток, чтобы отмечать путь через лабиринт. Тесей сразил Минотавра и вышел, чтобы воссоединиться с Ариадной, по дороге назад просто следуя пути, указываемому нитью. Эгей просил Тесея сменить на своем корабле черный парус на белый после того, как тот успешно выполнит свою миссию, но Тесей позабыл сделать это. Как гласит легенда, его отец, увидев, что корабль возвращается с черным парусом, бросился в море, с тех пор называемое Эгейским. При раскопках археологи обнаружили дворец, располагавшийся в критском городе Кносс, который мог быть местом мифического лабиринта, так как в нем имеется много переходов, подобных тем, что были описаны в легендарном повествовании о тюрьме Миноса.

В этом месте читатель может спросить: а какую же связь с математикой может иметь Критский лабиринт? По существу лабиринт является топологической головоломкой. Как таковой он является образцом более общей идеи, которую математики веками использовали при исследовании природы различных топологических структур. По этой причине самый первый лабиринт в истории входит в список десяти главнейших головоломок всех времен.

Головоломка

Никто в действительности не знает, как Критский лабиринт выглядел на самом деле. Его наиболее правдоподобная форма обнаруже-

на на древней монете, найденной при раскопках в Кноссе, месте вероятного расположения Критского лабиринта:



Решение задачи Критского лабиринта является простым. Войдя в его начало и следуя по его единственному закручивающемуся пути, вы достигнете центра. Критский лабиринт называется *уникурсальным* эйлеровым графом (глава 4), графом, в котором есть только один путь. Лабиринты с альтернативными путями бросают нам гораздо более серьезный вызов, поскольку алгоритма для их решения не существует. Однако на протяжении лет математики все же разработали ряд полезных предложений. Следующие правила являются переложением предложений Эдуара Люка (с которым мы встречались в главе 6):

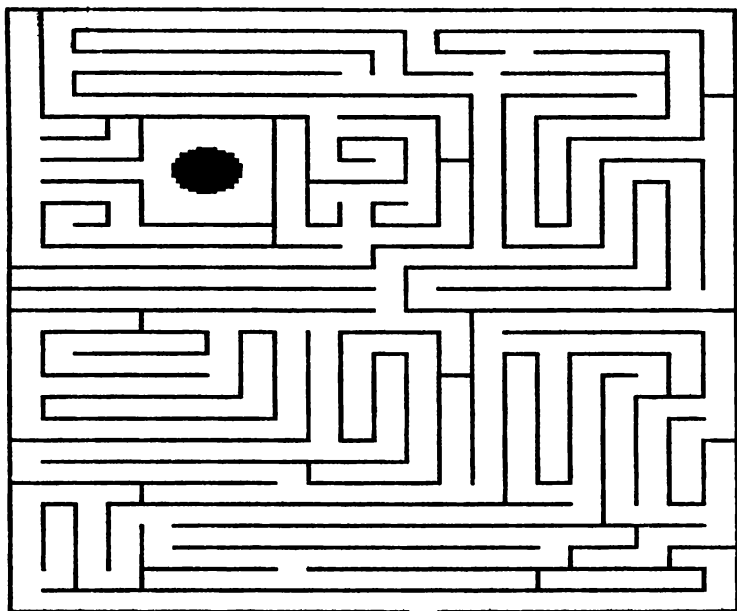
- ▶ Когда вы входите в лабиринт, постоянно смотрите вдоль пути вперед, чтобы увидеть, не заканчивается ли он «мертвым концом», тупиком; если это так, не ходите туда, выберите другой путь какой-нибудь развилки.
- ▶ Когда бы вы ни подошли к новой развилке, бросьте взгляд вперед, чтобы рассмотреть, является ли путь открытым или тупиковым.

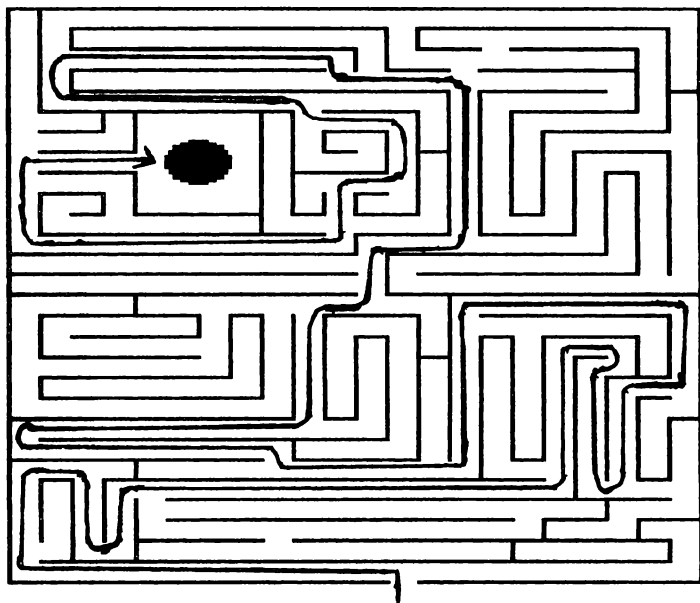
- Если на пути вы приходите к старой развилке или тупику, поверните назад и вернитесь по пути, по которому вы пришли.
- Никогда не вступайте на путь, помеченный с обеих сторон.

Рассмотрим лабиринт, нарисованный ниже. Задание — начать от входа внизу и найти путь к площадке, помеченной большим пятном. Читатель может самостоятельно убедиться в полезности правил, приведенных выше. Путь, изображенный на последующем рисунке является решением.

Критский лабиринт в равной мере вызвал к правителям, философам, математикам, художникам и писателям. Императоры позднего Рима носили на своих одеждах копирующие его вышивки. На стенах многих раннехристианских церквей обнаружены его высеченные изображения.

Концепция лабиринта универсальна. Одна из древнейших схем лабиринта обнаружена в Сицилии в виде изображения, высеченного на каменной стенке пять тысяч лет назад. Подобного рода наскальные рисунки находят по всему миру. Лабиринты ис-





пользовали на протяжении всей истории во всех культурах, чтобы отвратить зло, призвать сверхъестественные силы и испытать интеллектуальную мощь героев. Мы уже упоминали, что египтяне проектировали пирамиды в виде лабиринтов. Некоторые из своих зданий они тоже строили как лабиринты. Самым грандиозным из них был Великий лабиринт, огромное здание с тремя тысячами комнат, построенное в Северном Египте за 2000 лет до Р.Х. Древняя крепость Троя также была построена с проходами в виде лабиринта для защиты от вторжений путем приведения вторгающихся воинов в замешательство. На Яве, Суматре и в Индии изображения лабиринтов с незапамятных времен использовали как символ внутреннего мира. Племя Навахо в Соединенных Штатах всегда считало, что лабиринт служит представлением того, как был сотворен мир. Полы многих средневековых церквей несут на себе изображения лабиринта, символизирующие извилистый путь личности, стремящейся к спасению. Одно из самых больших таких изображений обнаружено в кафедральном соборе в Шартре, во Франции. Со времен Ренессанса многие европейские сады проектировались в виде лабиринтов, образованных подстриженными живыми изгородями. Двумя из наиболее известных являют-

ся сады, созданные в XVII веке в Хэмптон Корт в Лондоне и в Версальском дворце, последний украшен тридцатью девятью фонтанами и различными статуями, изображающими персонажей басен Эзопа.

Математические комментарии

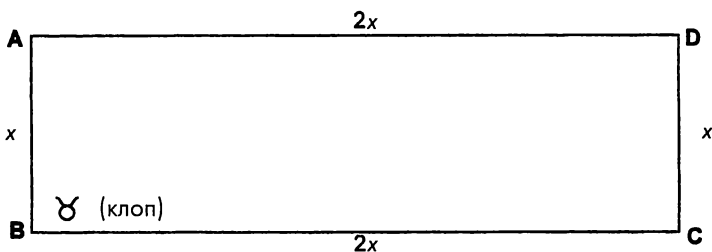
Понятие лабиринта используется для исследования структуры графов, так как идею, лежащую в основе конструирования лабиринтов, можно отождествить с нахождением оптимального пути в сети. В конце концов, все геометрические фигуры являются графами и могут быть проанализированы в этом качестве. Одним из наиболее важных следствий, вытекающих из понятия графа, является координатная геометрия, которую мы кратко обсудим в следующем подразделе.

Координатная геометрия

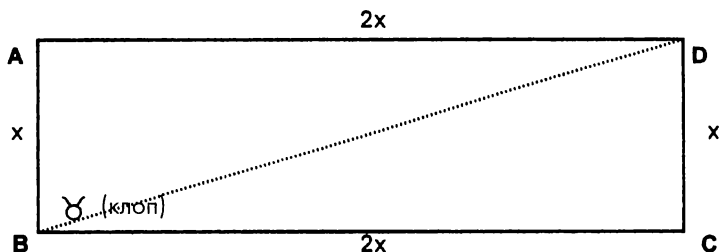
Во множестве геометрических задач требуется найти оптимальный путь. Вот одна типичная такая задача:

Длина маленького прямоугольного помоста вдвое больше его ширины. Площадь помоста равна 32 квадратным футам. Клоп в нижнем левом углу хочет перебраться в противоположный угол. Какой путь будет для клопа самым коротким? Какова длина этого пути?

Сначала нарисуем прямоугольный помост. Пусть x означает его ширину, а $2x$ его длину. Последнее выражение просто указывает, что длина вдвое больше ширины.



Оптимальным для клопа путем является диагональ, проведенная в противоположный угол:



Диагональ является гипотенузой прямоугольного треугольника **DBC** со сторонами, имеющими длины x и $2x$ футов. Поэтому если мы определим значения длин, мы сможем затем воспользоваться теоремой Пифагора (глава 5) для определения длины диагонали. Как же нам это сделать?

Мы знаем, что площадь помоста составляет 32 квадратных футов. Из школьной геометрии вспоминаем, что площадь прямоугольника есть произведение его длины на ширину. В нашем случае длина равна $2x$, а ширина равна x . Перемножая их, получаем

Площадь помоста:

$$(2x)(x) = 32$$

$$2x^2 = 32$$

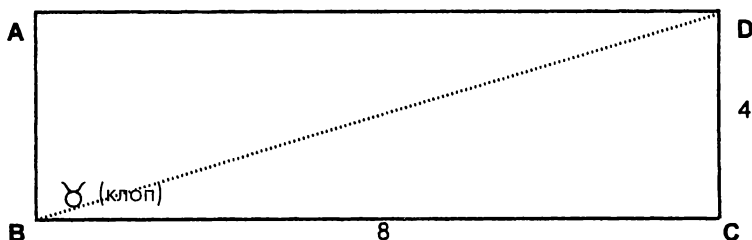
Деля обе стороны этого равенства на 2, получаем

$$x^2 = 16$$

Извлекая квадратный корень, находим, что

$$x = 4$$

Мы знаем теперь, что ширина равна 4 футам. Поскольку длина вдвое больше, она равна 8 футам. Это длины сторон треугольника **DBC**:



Теперь для определения длины гипотенузы **DB** мы можем использовать теорему Пифагора:

$$DB^2 = 4^2 + 8^2$$

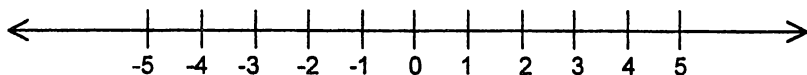
$$DB^2 = 16 + 64$$

$$DB^2 = 80$$

$$DB = \sqrt{80} = 8,94$$

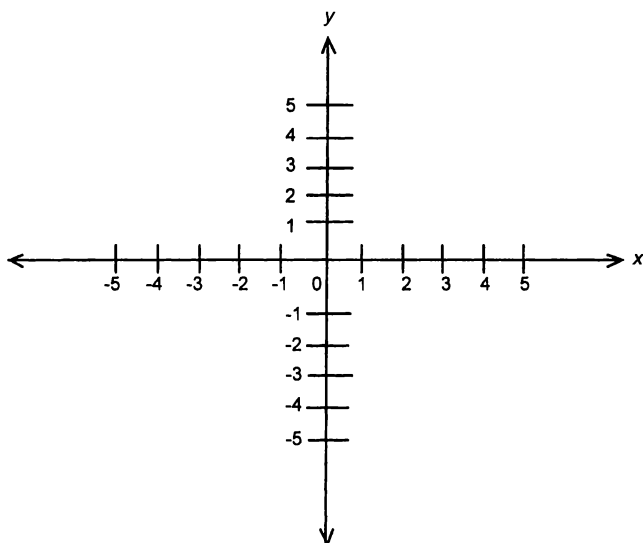
Итак, длина оптимального пути для нашего клопа равна 8,94 фута. Более трудный вариант этой задачи называется головоломкой «Паук и муха». Он включен в раздел Упражнения.

Изучение оптимальных путей приводит нас к заключению, что арифметика, алгебра и геометрия взаимосвязаны. Это было известно еще древним математикам. Однако для формального объединения этих дисциплин пришлось ждать появления работы французского математика и философа Рене Декарта (1596–1650). Он назвал это объединение **аналитической геометрией** (область математики, изучающая геометрические фигуры и их свойства путем перевода их в алгебраическую форму). Основным представлением в аналитической геометрии является представление о пересекающихся «числовых прямых». Числовая прямая на самом деле и сама является зачаточным геометрическим представлением, которое демонстрирует непрерывный переход от отрицательных чисел к положительным и взаимно однозначное соответствие между отдельным числом и отдельной «точкой» на прямой:

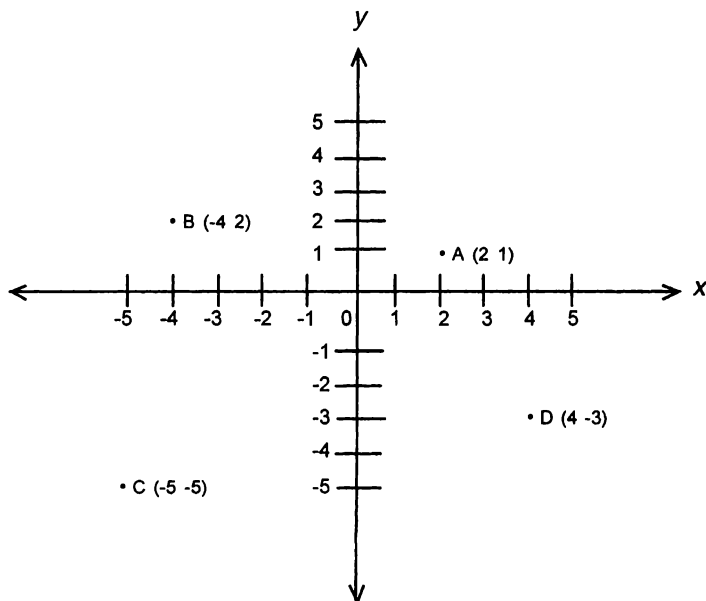


Декарт просто нарисовал две числовые прямые, пересекающиеся под прямым углом. Горизонтальную прямую он назвал «осью *x*», вертикальную «осью *y*», а точку из пересечения «началом координат». Эта система из двух перпендикулярных пересекающихся числовых прямых теперь называется в честь Декарта **декартовой плоскостью**.

Она называется также **системой координат**, поскольку можно теперь понимать плоскость как систему точек, определяемых их положением по отношению к двум осям, называемым «координатами». Например, (2, 1) является парой координат точки *A* на рисун-



ке ниже. Это означает, что точка А расположена на две единицы вправо от оси y и на одну единицу вверх от оси x . Кроме того, на рисунке показаны несколько других точек, В, С и D, и их координаты:



В этой системе координатных обозначений такое уравнение, как $2x + y = 2$, может быть нарисовано, чтобы выявить его внутреннюю «геометрическую форму», которая оказывается прямой линией. Заметим, что можно нарисовать точки, через которые проходит эта прямая, определив решения уравнения в терминах координат (x, y) . Вот некоторые из этих решений: $(-2, 6)$, $(-1, 4)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$ и $(2, -2)$. Они получены следующим образом:

$$2x + y = 2$$

Вычитаем из обеих частей $2x$:

$$y = 2 - 2x.$$

Поэтому

Если $x = -2$, то $y = 6$

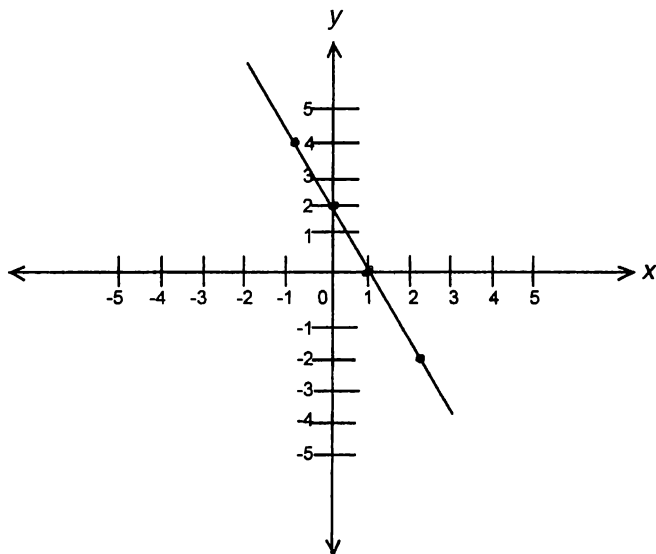
Если $x = -1$, то $y = 4$

Если $x = 0$, то $y = 2$

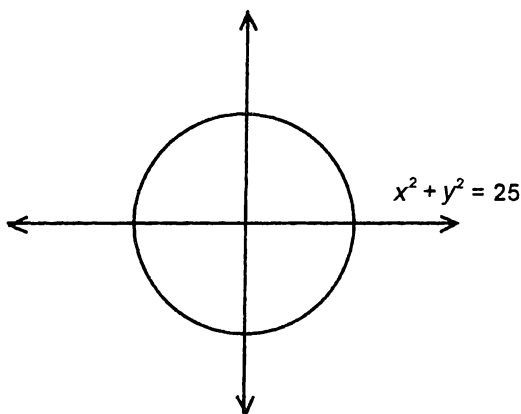
Если $x = 1$, то $y = 0$

Если $x = 2$, то $y = -2$

Если нанести эти точки на координатную плоскость и соединить их затем гладкой линией, то вы увидите, что они лежат на прямой линии:



Любая точка, лежащая на этой линии, имеет координаты, которые удовлетворяют уравнению $2x + y = 2$, и любая пара чисел (x, y) , удовлетворяющая этому уравнению, будет являться точкой этой линии. Ясно, что аналитическая геометрия позволяет нам связывать тип уравнения с типом геометрической фигуры. Уравнение $x^2 + y^2 = 25$, например, оказывается уравнением круга, в чем читатель может убедиться самостоятельно, задавая численные значения x и y и нанося соответствующие точки на разграфленную бумагу:

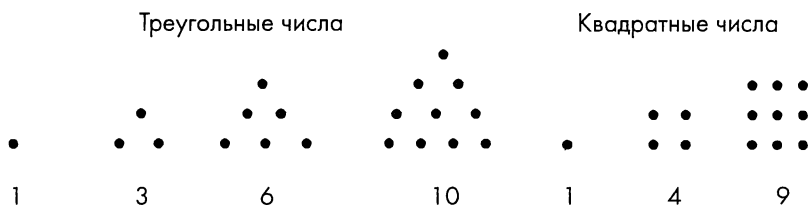


Аналитическая геометрия создала основу для составления карт, анализа функций всех видов, доказательства теорем, нахождения оптимальных путей. Этот список можно продолжать и продолжать.

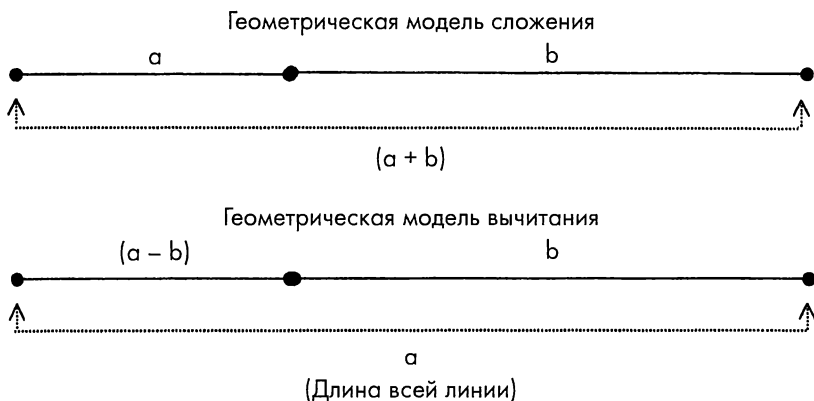
Пифагорейцы

Обсуждение лабиринтов, оптимальных путей и аналитической геометрии приводит нас, не иначе как по закону лабиринта, к сердцевине того, чем является математика: к изучению схем. Пифагорейцы основали математику как науку о схемах. Они составляли поистине выдающуюся группу. Во времена, когда женщины по большей части были исключены из занятий математикой и философией, они приветствовали их как равных, давая им редкую возможность принять участие в математических и философских штудиях. Феано, жена Пифагора, стала искусным астрологом и врачом. Она и ее дочери хотя и подвергались преследованиям, но распространяли философию пифагорейцев повсюду в Греции и Египте.

Пифагорейцы утверждали, что математика является языком, с помощью которого можно интерпретировать мир. Они также долго до Декарта заметили связь между числами и геометрическими фигурами. Например, они определяли **треугольные числа** как числа, проявляющие треугольную схему, а **квадратные числа** как числа, проявляющие квадратную схему. Числа 1, 3, 6 и 10 являются треугольными, а числа 1, 4, 9 и 16 являются квадратными, поскольку они могут быть представлены следующим образом:



Догадку пифагорейцев последующие греческие математики расширили до утверждения, что все числа имеют аналоги в сфере геометрии. Например, они показали, что сумма двух чисел $(a + b)$ соответствует сложению отрезков прямой, а разность $(a - b)$ — вычитанию отрезков прямой:



Первый рисунок показывает, что сложение соответствует соединению двух отрезков a и b , чтобы получить отрезок $(a + b)$. Второй рисунок показывает, что если отрезок длины a разделить на две части, одна из которых имеет длину b , то оставшаяся часть

будет иметь длину $(a - b)$, представляющую собой как раз ту длину, которая получается при вычитании b из a . Среди всех открытых пифагорейцами примеров, показывающих связь между числами и геометрическими фигурами, вероятно, важнейшим является так называемая **тройка Пифагора**, множество из трех чисел $\{a, b, c\}$, для которых верно соотношение $c^2 = a^2 + b^2$. Эта связь отражает, разумеется, тот факт, что квадрат гипотенузы c прямоугольного треугольника равен сумме квадратов двух его других сторон (a, b) .

Ради исторической точности следует упомянуть, что это соотношение было широко известно и прежде, чем оно было доказано Пифагором. И на самом деле все строители древности, видимо, обладали практическим его знанием. Например, глиняные дощечки, датированные приблизительно 2000 г. до Р.Х., сообщают нам, что древние вавилоняне завязывали веревки ленточками так, чтобы получать прямоугольный треугольник 3-4-5, поскольку $5^2 = 3^2 + 4^2$. Очевидно, что у них были практические знания о теореме Пифагора, и они были знакомы со многими тройками Пифагора: 3, 4, 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$); 6, 8, 10 ($6^2 + 8^2 = 10^2$); 5, 12, 13 ($5^2 + 12^2 = 13^2$); 8, 15, 17 ($8^2 + 15^2 = 17^2$); и так далее.

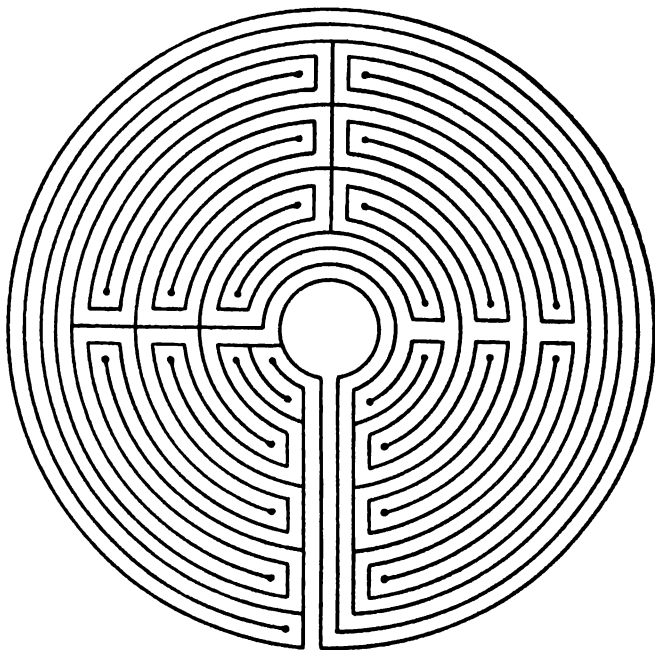
Заключительные замечания

В заключение я бы хотел в последний раз подчеркнуть, что головоломки сами по себе являются не только предметами развлечения и удовольствия, но и обладают способностью иллюстрировать основные понятия математики. Я надеюсь, что читатель расстанется с этой книгой, восприняв новый взгляд на головоломки и их связь с математическими исследованиями. Если бы я не мог даже сделать ничего больше, кроме того, чтобы показать это, написание этой книги все равно было делом стоящим.

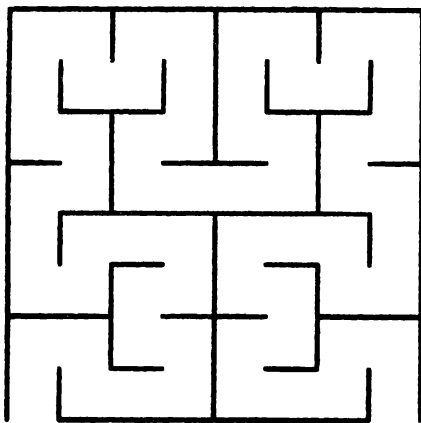
Упражнения

Лабиринты

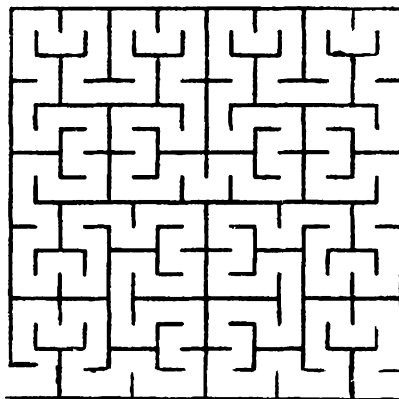
79. А вот гораздо более трудный вариант Критского лабиринта. Или нет? Выясните это.



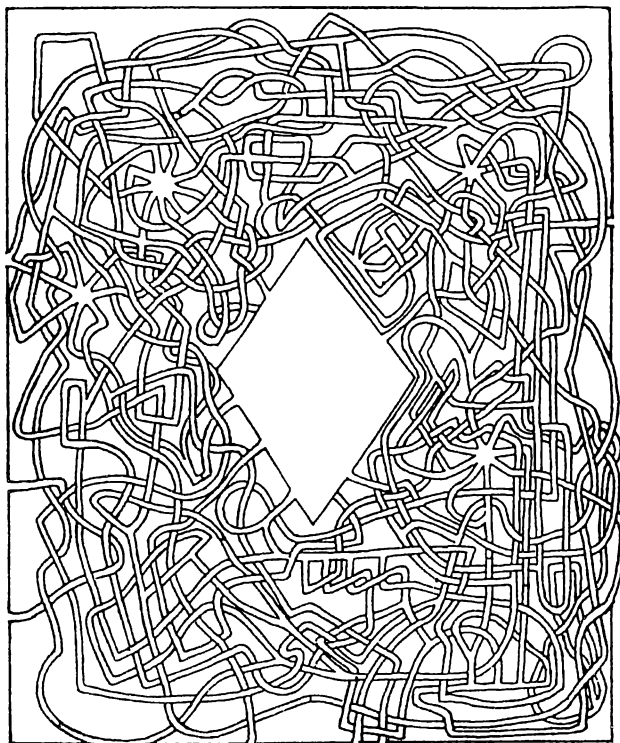
80. Можете ли вы найти путь через следующий лабиринт?



81. А вот более трудный вариант лабиринта того же типа. Можете ли вы найти путь через него?

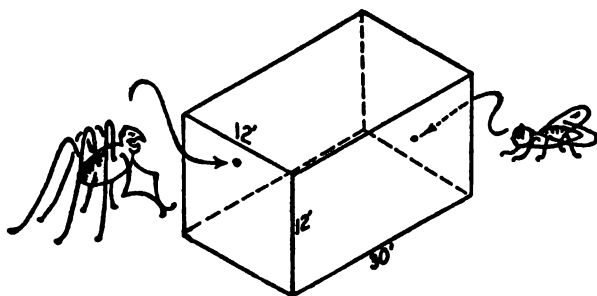


82. Теперь испытайте свои силы в действительно трудном лабиринте, изобретенном Льюисом Кэрроллом. Можете ли вы найти путь к его ромбовидному центру?



Геометрия

83. Как мы упоминали выше, существует гораздо более трудный вариант задачи о клопе, принадлежащий перу Генри Э. Дьюдени. В комнате 30 футов в длину, 12 футов в ширину и 12 футов в высоту на средней вертикальной линии одной из маленьких стен в 1 футе от потолка сидит паук. Муха прицепилась к противоположной стенке на средней вертикальной линии в 1 футе от пола. Каков самый короткий путь, по которому паук может настичь свою жертву?



84. Первыми четырьмя треугольными числами, как мы видели ранее, являются 1, 3, 6 и 10. А каково двенадцатое? Можете ли вы определить общее правило?

85. Первыми четырьмя квадратными числами, как мы тоже видели ранее, являются 1, 4, 9 и 16. Можете ли вы определить для них общее правило?

ОТВЕТЫ И ПОЯСНЕНИЯ



Загадка Сфинкса

1.

ОТВЕТ

Блохи

ПОЯСНЕНИЕ

Если вы поймали блоху, вы, конечно, можете ее выбросить. Однако если вы не можете ее поймать, вам придется примириться с тем, чтоб вы носите ее с собой.

2.

ОТВЕТ

Мул

ПОЯСНЕНИЕ

Мул является «помесью». Он «наполовину осел» и «наполовину лошадь». Более точно, он является бесплодным потомком либо осла и кобылы, либо ослицы и жеребца. Таким образом, мул не похож на свою мать и не имеет сходства с отцом. Поскольку он бесплоден, он «не способен иметь потомства».

3.

ОТВЕТ

Собака

ПОЯСНЕНИЕ

Обычно о собаке говорят, что, конечно, она «отпугивает» врагов хозяина своим «оружием» (острыми зубами или клыками), которое носит в челюстях. Однако даже от шлепка ребенка она убегает.

4.

ОТВЕТ

Радуга

ПОЯСНЕНИЕ

Красный, синий, фиолетовый и зеленый — это цвета радуги. Каждый может увидеть радугу, но никто никогда не может приблизиться к ней или коснуться ее.

5.

ОТВЕТ

Сегодня

ПОЯСНЕНИЕ

Чтобы понять смысл ответа, предположим, что *сегодня* — это вторник. Прежде чем он родился или появился на свет, вторник, конечно, имел другое имя — *завтра*. Почему? Потому что день до его рождения был понедельником. А в понедельник мы говорим о вторнике как о «завтра». А когда вторника «не станет», он принимает новое имя — *вчера*. Почему? Потому что когда вторник заканчивается, наступает среда. А в среду мы говорим о вторнике как о «вчера». Таким образом, хотя оно остается всего одним днем, *сегодня*, конечно, меняет имена три дня подряд — *вчера*, *сегодня* и *завтра*.

6.

ОТВЕТ

Ваше имя.

ПОЯСНЕНИЕ

Ответ самоочевиден.

7.

ОТВЕТ

Здесь мы приведем для иллюстрации только по одной загадке для каждого данного слова. Читатель, несомненно, придумал много других загадок, своих собственных.

- А. Я могу взвешивать и я слепо, но не имею приборов и не человек. Что я такое?
- В. Я могу дать завязь и расти, но я не цветок и не дерево. Что я такое?
- С. Я могу быть горьким или сладким, но я не пища и не питье. Что я такое?
- Д. Оно летит, но не имеет крыльев. Что это?

ПОЯСНЕНИЕ

О правосудии мы говорим, что оно имеет весы (*на весах правосудия, весомое свидетельство, Фемида, держащая весы*) и слепо (*Фемида с завязанными глазами*).

Мы обычно говорим, что дружба завязывается и является чем-то способным к росту, подобно цветку или дереву.

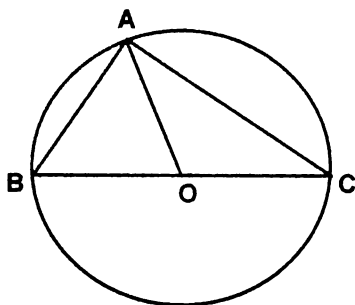
Любовь это то, что мы воспринимаем как обладающее вкусом, выражая это в таких оборотах речи как «любовь сладка» или «любовь горька».

Основой для этой загадки является расхожее выражение «*Время летит*».

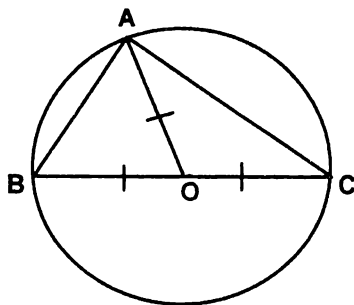
8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

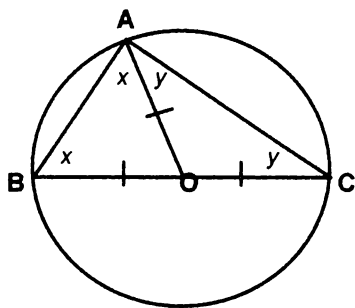
Начнем с того, что соединим вершину **А** треугольника **ABC** с центром круга **О**, проведя прямолинейный отрезок **АО**.



Заметим, что **АО** является радиусом круга. Радиусами круга также являются **ОВ** и **ОС**. Поэтому все эти отрезки равны друг другу. Покажем этот факт на рисунке, пометив каждый из этих отрезков черточкой.



В полукруге теперь находятся два равнобедренных треугольника, **AOB** и **AOC** (как демонстрируют черточки). Углы, противоположные равным сторонам равнобедренного треугольника равны. Равные углы в треугольнике **AOB** можно пометить буквами x , а в треугольнике **AOC** буквами y .



Рассмотрим теперь исходный треугольник **ABC**. В терминах x и y три его угла могут быть представлены следующим образом:

1. $\angle BAC = (x + y)$
2. $\angle CBA = x$
3. $\angle BCA = y$

Сумма углов треугольника равна 180 градусам. Поэтому сумму углов треугольника **ABC** можно записать в виде следующего равенства:

$$(x + y) + x + y = 180^\circ$$

Упрощая левую часть этого равенства, получаем

$$2x + 2y = 180^\circ$$

Еще больше упростим это равенство, деля обе части на 2

$$x + y = 90^\circ$$

Но $x + y$ является полным числом градусов, входящих в угол при вершине **A**, а именно $\angle \text{BAC}$. Так как мы только что доказали, что $x + y$ равно 90° , мы можем заключить, что $\angle \text{BAC}$ равен 90° .

9.

СХЕМА

Цифры в произведении, получаемом умножением любого числа на 9, в сумме дают 9 или число, кратное 9 (18, 27, 36 и т.д.). Числа в любом числе, кратном 9, в сумме тоже дают 9 (или число, кратное 9):
 $1 + 8 = 9$, $2 + 7 = 9$, $3 + 6 = 9$ и так далее:

$$9 \times 9 = 81 \rightarrow 8 + 1 = 9$$

$$9 \times 7 = 63 \rightarrow 6 + 3 = 9$$

$$9 \times 12 = 108 \rightarrow 10 + 8 = 18 \rightarrow 1 + 8 = 9$$

$$9 \times 100 = 900 \rightarrow 9 + 0 + 0 = 9$$

$$9 \times 4579 = 41\,211 \rightarrow 4 + 1 + 2 + 1 + 1 = 9$$

и так далее:

10.

ОТВЕТЫ

A. 477 имеет 9 делителем: $4 + 7 + 7 = 18 \rightarrow 1 + 8 = 9$

B. 648 имеет 9 делителем: $6 + 4 + 8 = 18 \rightarrow 1 + 8 = 9$

C. 8765 не имеет 9 делителем: $8 + 7 + 6 + 5 = 26 \rightarrow 2 + 6 = 8$ (не 9)

D. 738 имеет 9 делителем: $7 + 3 + 8 = 18 \rightarrow 1 + 8 = 9$

E. 9878 не имеет 9 делителем: $9 + 8 + 7 + 8 = 32 \rightarrow 3 + 2 = 5$ (не 9)

11.

СХЕМА

Квадрат четного числа четен. Квадрат нечетного числа нечетен. Поэтому так как 22 является четным числом, его квадрат $22^2 = 484$ тоже четен. А так как 23 является нечетным числом, его квадрат $23^2 = 529$ нечетен.

ПОЯСНЕНИЕ

Формулой для четного числа является $2n$. Эта формула является обобщением того факта, что любое число n , умноженное на 2, всегда дает в результате четное число:

n	$2n$
0	$2 \times 0 = 0$
1	$2 \times 1 = 2$
2	$2 \times 2 = 4$
3	$2 \times 3 = 6$
4	$2 \times 4 = 8$
5	$2 \times 5 = 10$
...	...

Теперь возведем эту формулу в квадрат:

$$(2n)^2 = 4n^2.$$

Является ли $4n^2$ тоже четным числом? Если это так, то мы только что показали, что квадрат любого четного числа четен. Заметим, что $4n^2$ можно разложить на множители следующим образом:

$$4n^2 = 2(2n^2).$$

Выражение $2(2n^2)$ представляет собой $(2n^2)$, умноженное на 2. А значит, оно представляет четное число.

Формулой для нечетного числа является $2n + 1$. Эта формула является обобщением того факта, что если любое число n , умножить на 2, а затем прибавить 1, то в результате всегда получается нечетное число:

n	$2n$
0	$2 \times 0 + 1 = 1$
1	$2 \times 1 + 1 = 3$
2	$2 \times 2 + 1 = 5$
3	$2 \times 3 + 1 = 7$
4	$2 \times 4 + 1 = 9$
5	$2 \times 5 + 1 = 11$
...	...

Теперь возведем эту формулу в квадрат:

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1.$$

Является ли результат $4n^2 + 4n + 1$ нечетным числом? Если это так, то мы только что показали, что квадрат любого нечетного числа нечетен. Выражение $4n^2 + 4n + 1$ можно переписать в виде $(4n^2 + 4n) + 1$. Давайте выделим в нем множители:

$$(4n^2 + 4n) + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1.$$

Результат $2(2n^2 + 2n) + 1$ представляет нечетное число. Если вы не видите этого, замените выражение $(2n^2 + 2n)$ в $2(2n^2 + 2n) + 1$ любой буквой, например, m . Последнее выражение превратится в $2(m) + 1$ или $2m + 1$. А это, конечно, формула произвольного нечетного числа.

Для читателя, который подзабыл школьную алгебру, процедуру возведения в квадрат $(2n + 1)$ подробно представим следующим образом:

$$(2n + 1)^2 = (2n + 1)(2n + 1).$$

Перемножаем первые два члена каждого выражения:

$$\overbrace{(2n + 1)(2n + 1)} = 4n^2 + \dots$$

Перемножаем внутренние члены и внешние члены, прибавляя произведения к предыдущему результату:

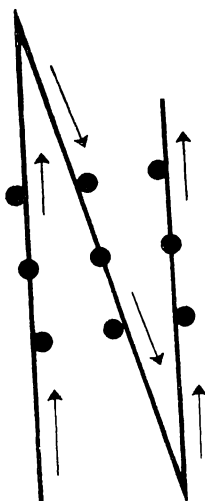
$$\overbrace{(2n + 1)(2n + 1)} = 4n^2 + 2n + 2n + \dots = 4n^2 + 4n + \dots$$

Перемножаем оставшиеся два члена, прибавляя произведения к предыдущему результату:

$$\overbrace{(2n + 1)(2n + 1)} = 4n^2 + 4n + 1.$$

12.

ОТВЕТ



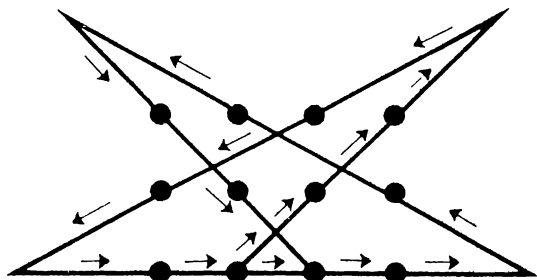
ПОЯСНЕНИЕ

Три линии не обязаны проходить через центры точек; они могут только касаться некоторых из них, как показано на рисунке. Это и есть то самое озарение, которое подходит для решения данного варианта головоломки.

13.

ОТВЕТ

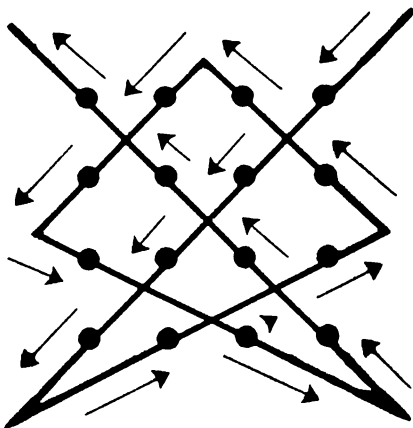
Для решения этого варианта головоломки необходимы пять линий.



14.

ОТВЕТ

Для решения этого варианта головоломки необходимы шесть линий.





Волк, коза и капуста

15.

ОТВЕТ

Требуется пять переправ (H_1 и W_1 = первая супружеская пара, H_2 и W_2 = вторая супружеская пара):

	На этом берегу	В лодке	На том берегу
0.	<u>H</u> ₁ <u>W</u> ₁ <u>H</u> ₂ <u>W</u> ₂	--	----
1.	-- <u>H</u> ₂ <u>W</u> ₂	<u>H</u> ₁ <u>W</u> ₁ →	----
2.	-- <u>H</u> ₂ <u>W</u> ₂	← <u>W</u> ₁ _	<u>H</u> ₁ ----
3.	-- <u>W</u> ₁ _	<u>H</u> ₂ <u>W</u> ₂ →	<u>H</u> ₁ ----
4.	-- <u>W</u> ₁ _	← <u>H</u> ₁ _	-- <u>H</u> ₂ <u>W</u> ₂
5.	----	<u>H</u> ₁ <u>W</u> ₁ →	-- <u>H</u> ₂ <u>W</u> ₂
0.	----	--	<u>H</u> ₁ <u>W</u> ₁ <u>H</u> ₂ <u>W</u> ₂

16.

ОТВЕТ

Требуется шесть полных переправ. Полной мы считаем переправу с одного берега на другой. Промежуточная остановка на острове с последующим возвращением обратно не считается полной переправой. Далее приводится одно из возможных решений варианта головоломки Тарталья для четырех пар (H_1 и W_1 = первая супружеская пара, H_2 и W_2 = вторая супружеская пара, H_3 и W_3 = третья супружеская пара, H_4 и W_4 = четвертая супружеская пара):

	На этом берегу	В лодке	На острове	В лодке	На том берегу
0.	<u>H</u> ₁ <u>W</u> ₁ <u>H</u> ₂ <u>W</u> ₂ <u>H</u> ₃ <u>W</u> ₃ <u>H</u> ₄ <u>W</u> ₄	---	--	---	-----
1.	<u>H</u> ₁ _ <u>H</u> ₂ _ <u>H</u> ₃ <u>W</u> ₃ <u>H</u> ₄ <u>W</u> ₄	<u>W</u> ₁ <u>W</u> ₂ →	--	<u>W</u> ₁ <u>W</u> ₂ →	-----
2.	<u>H</u> ₁ _ <u>H</u> ₂ _ <u>H</u> ₃ <u>W</u> ₃ <u>H</u> ₄ <u>W</u> ₄	← <u>W</u> ₂ _	--	← <u>W</u> ₂ _	_ <u>W</u> ₁ -----
3.	<u>H</u> ₁ _ <u>H</u> ₂ _ <u>H</u> ₃ _ <u>H</u> ₄ <u>W</u> ₄	<u>W</u> ₂ <u>W</u> ₃ →	--	--	_ <u>W</u> ₁ -----
		← <u>W</u> ₂ _	<u>W</u> ₃ _		
4.	<u>H</u> ₁ _ _ <u>H</u> ₃ _ <u>H</u> ₄ <u>W</u> ₄	<u>H</u> ₂ <u>W</u> ₂ →	<u>W</u> ₃ _	<u>H</u> ₂ <u>W</u> ₂ →	_ <u>W</u> ₁ -----
5.	<u>H</u> ₁ _ _ <u>H</u> ₃ _ <u>H</u> ₄ <u>W</u> ₄	← <u>W</u> ₁ _	<u>W</u> ₃ _	← <u>W</u> ₁ _	_ <u>H</u> ₂ <u>W</u> ₂ -----
6.	_ _ _ <u>H</u> ₃ _ <u>H</u> ₄ <u>W</u> ₄	<u>H</u> ₁ <u>W</u> ₁ →	<u>W</u> ₃ _	<u>H</u> ₁ <u>W</u> ₁ →	_ <u>H</u> ₂ <u>W</u> ₂ -----

- | | | | | | |
|-----|--|---|------------------------|---|--|
| 7. | $\text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{H}_3\text{---}\text{H}_4\text{---}\text{W}_4$ | $\leftarrow \text{W}_3\text{---}$ | $\text{W}_1\text{---}$ | $\leftarrow \text{W}_1\text{---}$ | $\text{H}_1\text{---}\text{H}_2\text{---}\text{W}_2\text{---}\text{---}$ |
| 8. | $\text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{H}_4\text{---}\text{W}_4$ | $\text{H}_3\text{---}\text{W}_3\rightarrow$ | $\text{W}_1\text{---}$ | $\text{H}_3\text{---}\text{W}_3\rightarrow$ | $\text{H}_1\text{---}\text{H}_2\text{---}\text{W}_2\text{---}\text{---}$ |
| 9. | $\text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{H}_4\text{---}\text{W}_4$ | $\leftarrow \text{W}_3\text{---}$ | $\text{W}_1\text{---}$ | $\leftarrow \text{W}_3\text{---}$ | $\text{H}_1\text{---}\text{H}_2\text{---}\text{W}_2\text{---}\text{H}_3\text{---}\text{---}$ |
| 10. | $\text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{H}_4\text{---}$ | $\text{W}_3\text{---}\text{W}_4\rightarrow$ | $\text{W}_1\text{---}$ | $\text{W}_3\text{---}\text{W}_4\rightarrow$ | $\text{H}_1\text{---}\text{H}_2\text{---}\text{W}_2\text{---}\text{H}_3\text{---}\text{---}$ |
| 11. | $\text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{H}_4\text{---}\text{---}$ | $\leftarrow \text{W}_4\text{---}$ | $\text{W}_1\text{---}$ | $\leftarrow \text{W}_4\text{---}$ | $\text{H}_1\text{---}\text{H}_2\text{---}\text{W}_2\text{---}\text{H}_3\text{---}\text{W}_3\text{---}\text{---}$ |
| 12. | $\text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{---}$ | $\text{H}_4\text{---}\text{W}_4\rightarrow$ | $\text{W}_1\text{---}$ | $\text{H}_4\text{---}\text{W}_4\rightarrow$ | $\text{H}_1\text{---}\text{H}_2\text{---}\text{W}_2\text{---}\text{H}_3\text{---}\text{W}_3\text{---}\text{---}$ |
| | | | $\text{W}_1\text{---}$ | $\leftarrow \text{H}_1\text{---}$ | $\text{---}\text{---}\text{H}_2\text{---}\text{W}_2\text{---}\text{H}_3\text{---}\text{W}_3\text{---}\text{H}_4\text{---}\text{W}_4$ |
| | | | $\text{---}\text{---}$ | $\text{H}_1\text{---}\text{W}_1\rightarrow$ | $\text{---}\text{---}\text{H}_2\text{---}\text{W}_2\text{---}\text{H}_3\text{---}\text{W}_3\text{---}\text{H}_4\text{---}\text{W}_4$ |
| 0. | $\text{---}\text{---}\text{---}\text{---}\text{---}$ | | | | $\text{H}_1\text{---}\text{W}_1\text{---}\text{H}_2\text{---}\text{W}_2\text{---}\text{H}_3\text{---}\text{W}_3\text{---}\text{H}_4\text{---}\text{W}_4$ |

17.

ОТВЕТ

Одно из решений головоломки Киркмана таково:

Понедельник			Вторник			Среда			Четверг		
0	5	10	0	1	4	1	2	5	4	5	8
1	6	11	2	3	6	3	4	7	6	7	10
2	7	12	7	8	11	8	9	12	11	12	0
3	8	13	9	10	13	10	11	14	13	14	2
4	9	14	12	14	5	13	0	6	1	3	9

Пятница			Суббота			Воскресенье		
4	6	12	10	12	3	2	4	10
5	7	13	11	13	4	3	5	11
8	10	1	14	1	7	6	8	14
9	11	2	0	2	8	7	9	0
14	0	3	5	6	9	12	13	1

18.

ОТВЕТ

Наименьшее необходимое число шаров равно трем.

ПОЯСНЕНИЕ

Предположим, что сначала мы вытащили белый шар. Если нам повезет, следующий вынутый нами шар тоже окажется белым, и игра будет окончена. Но мы не можем полагаться на это. Нам следует, наоборот, предположить «наихудший сценарий», а именно, что второй вынутый нами шар окажется черным, поскольку в задаче требуется «гарантировано» получить пару шаров одного цвета. Разумеется, мы можем сначала вытащить черный шар, а потом белый. Конечный результат окажется тем же: один белый шар и один черный.

Следующий вынутый нами шар будет, разумеется, либо белым, либо черным. Не важно, какого цвета будет *третий* шар, это будет цвет, совпадающий с цветом одного из уже вынутых шаров. Поэтому у нас будет пара шаров одного цвета. Итак, наименьшее число шаров, которые необходимо достать, чтобы гарантировано получить пару шаров одного цвета, равно трем.

19.

ОТВЕТЫ

- А. Для десяти белых, десяти черных и десяти зеленых шаров наименьшее необходимое число шаров равно четырем. Предполагая наихудший сценарий, а именно, что мы достали один белый, один черный и один зеленый шар, в любом порядке, нужный шар появится четвертым, ибо его цвет будет совпадать с цветом одного из трех шаров, вынутых ранее.
- В. Для десяти белых, десяти черных, десяти зеленых и десяти желтых шаров наименьшее необходимое число шаров равно пяти. Причина этого та же. После того как мы вынули четыре шара разных цветов (наихудший сценарий), цвет пятого шара будет совпадать с цветом одного из них.
- С. Для десяти белых, десяти черных, десяти зеленых, десяти желтых и десяти красных шаров наименьшее необходимое число шаров равно шести. Снова причина этого та же. После того как мы вынули пять шаров разных цветов (наихудший сценарий), цвет шестого шара будет совпадать с цветом одного из них.

ПОЯСНЕНИЕ

Общая схема состоит в том, что число шаров, которое требуется достать, чтобы гарантировано получить пару шаров одного цвета, должно быть на единицу больше числа имеющихся цветов.

ТАБЛИЦА А-1: РЕШЕНИЕ ГОЛОВОЛОМКИ О ВЫНИМАНИИ ШАРОВ

Число цветов в ящике	Число шаров, которое нужно достать, чтобы получить пару шаров одного цвета	Правило
2	3	На один шар больше, чем число цветов
3	4	На один шар больше, чем число цветов
4	5	На один шар больше, чем число цветов

5	6	На один шар больше, чем число цветов
...
n	$n + 1$	На один шар больше, чем число цветов

20.

ОТВЕТ

Это не влияет на решение.

ПОЯСНЕНИЕ

Когда количества шаров каждого цвета одинаковы (например, десять белых и десять черных, или пять белых и пять черных, и так далее), вероятность быть вынутым у шара каждого цвета одинакова. Если увеличить число шаров какого-либо цвета, скажем, увеличить до пятнадцати число черных шаров, сохраняя число шаров других цветов, то вероятность вынуть шар черного цвета, конечно, увеличивается. Однако это не меняет решения, поскольку вероятность вынуть шар определенного цвета не влияет на *наихудший* сценарий, который остается прежним.

21.

ОТВЕТ

Наименьшее число перчаток, которые необходимо достать, равно тринадцати.

ПОЯСНЕНИЕ

Всего в ящике находится двадцать четыре перчатки:

шесть пар черных перчаток = двенадцать черных перчаток

шесть пар белых перчаток = двенадцать белых перчаток

Из двадцати четырех перчаток половина на правую руку, а половина на левую руку. При наихудшем сценарии мы могли бы достать все двенадцать перчаток на левую руку (шесть из которых белые, а шесть черные) или все двенадцать перчаток на правую руку (шесть из которых белые, а шесть черные). Тринадцатая вынутая перчатка будет парной к одной из вынутых ранее.

Предположим, что мы вынули двенадцать перчаток на левую руку, шесть белых и шесть черных. Тринадцатой может быть только перчатка на правую руку, потому что перчаток на левую руку в ящике больше не осталось. А она либо белая, либо черная. В любом из этих случаев она будет иметь парную.

22.

ОТВЕТ

Два шанса из трех.

ПОЯСНЕНИЕ

Пусть В означает, что в сумке изначально находится черный жетон, а W_1 означает, что в ней находится белый жетон. Пусть W_2 символизирует то, что в сумку добавляют белый жетон.

Сначала предположим, что в сумке изначально находится белый жетон W_1 . Когда в сумку добавляют белый жетон W_2 , в ней оказываются два белых жетона, W_1 и W_2 . Поэтому из сумки будет вынут либо белый жетон W_1 , находившийся в ней первоначально, либо белый жетон W_2 , добавленный в нее.

Предположим теперь, что в сумке изначально находится черный жетон В. Когда в сумку добавляют белый жетон W_2 , в ней оказываются черный и белый жетоны, В и W_2 . Поэтому белым жетоном, который вынут из сумки, может быть только жетон W_2 , который в нее добавлен.

Подведем итог трем возможным сценариям в диаграмме:

	Жетон внутри сумки	После добавления жетона	Вынутый жетон
Сценарий 1:	W_1	$W_1 W_2$	W_1
Сценарий 2:	W_1	$W_1 W_2$	W_2
Сценарий 3:	В	В W_2	W_2

В сценариях 1 и 2 можно вынуть только белый шар. Однако в сценарии 3 можно вынуть либо черный шар, либо белый (даже несмотря на то, что в действительности был вынут белый шар). Таким образом, из трех сценариев два гарантируют, что будет вынут белый шар. Итак, вытащить белый шар имеется два шанса из трех.

23.

ОТВЕТ

Двенадцать путей.

ПОЯСНЕНИЕ

Имеется три различных пути от дома Сары к дому Билла. Когда мы уже попали к дому Билла, есть четыре различных пути, чтобы попасть к дому Ширли. Поэтому для каждого пути от дома Сары к до-

му Билла можно выбрать один из четырех путей к дому Ширли. Итак, имеется $3 \times 4 = 12$ разных путей от дома Сары к дому Ширли. Пути можно изобразить в схематической форме следующим образом. Сначала обозначим три возможных пути от дома Сары к дому Билла символами B_1 , B_2 и B_3 , а четыре возможных пути от дома Билла к дому Ширли символами S_1 , S_2 , S_3 и S_4 . Двенадцать возможных путей от дома Сары к дому Ширли таковы:

Через B_1 к дому Ширли

$B_1 - S_1$

$B_1 - S_2$

$B_1 - S_3$

$B_1 - S_4$

Через B_2 к дому Ширли

$B_2 - S_1$

$B_2 - S_2$

$B_2 - S_3$

$B_2 - S_4$

Через B_3 к дому Ширли

$B_3 - S_1$

$B_3 - S_2$

$B_3 - S_3$

$B_3 - S_4$

24.

ОТВЕТ

Существует 380 возможных исходов голосования. Если на пост президента могут баллотироваться только два члена клуба, то имеется лишь тридцать восемь возможных исходов голосования.

ПОЯСНЕНИЕ

Когда президент избран, остается девятнадцать членов клуба, из которых может быть избран вице-президент. Поэтому существует $20 \times 19 = 380$ возможных исходов голосования. Это пример размещений из n по r объектов: $n!/(n-r)!$. В данном случае $n = 20$ и $r = 2$:

$$n!/(n-r)! = 20!/(20-2)! = 20!/18! = 20 \times 19 = 380.$$

Если только Бренда и Хизер могут баллотироваться в президенты, выбор на эту должность сужается до $2! = 2 \times 1 = 2$ возможностей. Теперь для каждой из них остается девятнадцать членов клуба (включая либо Бренду, либо Хизера), из которых может быть избран вице-президент. Значит, в этом случае число возможных избранных пар равно $2 \times 19 = 38$.

25.

ОТВЕТ

Алекс может приготовить 792 различных вида супа.

ПОЯСНЕНИЕ

Если бы он использовал все двенадцать овощей, он, конечно, мог бы приготовить лишь 1 вид супа. Однако он ограничивается пятью овощами. Поэтому у него есть целых $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95\,040$ возможных выборов. Кроме того, порядок, в котором выбираются овощи, не имеет значения. Сколько неразличимых среди всех этих выборов дает тогда каждый набор из пяти овощей? Число неразличимых выборов равно $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Тогда он может приготовить $95\,040 : 120 = 792$ разных вида супа.



Кролики Фибоначчи

26.

ОТВЕТ

Было бы неподъемной задачей составить список всех схем, которые были зарегистрированы к настоящему времени. Вот еще одна:

Если начать с 2, то каждое шестидесятое число заканчивается цифрой 1: например, шестидесятое число после 2 имеет вид 4 052 739 537 881 (в конце 1), шестидесятое число после него имеет вид 14 028 366 653 498 915 298 923 761 (тоже в конце 1); и так далее.

Читатель, которого интересуют другие схемы, может обратиться к источникам, приведенным в разделе Дальнейшее чтение.

27.

ОТВЕТ

Среди ряда других я обнаружил следующие интересные схемы, которые остаются верными настолько, насколько у меня хватило терпения проверить:

- Начиная с 6, отношение двух соседних членов ряда выглядит почти постоянным числом, близким к 0,54 ($6/11 = 0,545$, $11/20 = 0,55$, $20/37 = 0,540$, $37/68 = 0,544$, $68/125 = 0,544$, и т. д.)
- Каждое число, находящееся на четном месте в последовательности, само является четным: например, 2 на втором месте, 6 на четвертом, 20 на шестом, и так далее.
- Каждое число, находящееся на нечетном месте в последовательности, само является нечетным: например, 1 на первом месте, 3 на третьем, 11 на пятом, и так далее.

28.

ОТВЕТ

40 дней

ПОЯСНЕНИЕ

Так как Тим выкуривает только две трети сигареты, у него остается окурочек, равный одной трети сигареты. Это означает, что после каждых трех выкуренных сигарет он может сложить из окурочков новую сигарету. У него двадцать семь сигарет. Из них получается двадцать семь окурочков. Из этих окурочков Тим может сложить девять новых сигарет: $27 : 3 = 9$. Далее, от девяти «новых» сигарет остается еще девять окурочков. Из этих окурочков Тим может сложить три новых сигареты: $9 : 3 = 3$. Наконец, от этих трех добавочных сигарет остается еще три окурочка. Из этих окурочков он может сложить одну последнюю сигарету. Поэтому всего он выкуривает $27 + 9 + 3 + 1 = 40$ сигарет. Поскольку Тим выкуривает по одной сигарете в день, ему потребуется 40 дней, чтобы отказаться от своей вредной привычки.

29.

ОТВЕТ

На вечеринке присутствуют пятьдесят девять человек.

ПОЯСНЕНИЕ

Подсчет объектов (людей, предметов, букв, и т.д.) по одному, по два, по три и так далее эквивалентен разбиению их на множества, то есть на единицы, пары, тройки и так далее. Например, если мы будем пересчитывать двадцать шесть букв английского алфавита парами, мы на самом деле разделим число букв пополам: $26 : 2 = 13$. Таким образом, в алфавите содержится тринадцать пар букв без остатка. Если мы будем считать их тройками, мы на самом деле разделим число букв на три: $26 : 3$. В этом случае в ответе получится восемь троек и два в остатке. Термин «в остатке», разумеется, означает, что при делении 26 на 3 остаются два избыточных объекта.

Эта догадка открывает нам путь к решению головоломки. Сначала разделим числа между 50 и 60 на три, отмечая числа, дающие в остатке 2. Эта процедура переводит на язык арифметики утверждение, что если «считать по три за раз, то остается два не сосчитанных человека»:

$$50 : 3 = 16, \text{остаток} = 2$$

$$51 : 3 = 17, \text{остаток} = 0$$

$$52 : 3 = 17, \text{остаток} = 1$$

$$53 : 3 = 17, \text{остаток} = 2$$

$$54 : 3 = 18, \text{остаток} = 0$$

$$55 : 3 = 18, \text{остаток} = 1$$

$$56 : 3 = 18, \text{остаток} = 2$$

$$57 : 3 = 19, \text{остаток} = 0$$

$$58 : 3 = 19, \text{остаток} = 1$$

$$59 : 3 = 19, \text{остаток} = 2$$

$$60 : 3 = 20, \text{остаток} = 0$$

С помощью этой процедуры мы отобрали числа 50, 53, 56 и 59, дающие после деления на 3 остаток 2. Теперь нам надо отыскать среди этих четырех чисел то, которое после деления на 5 дает остаток 4. Эта процедура переводит на язык арифметики утверждение, что если «считать по пять за раз, то остается четыре не сосчитанных человека»:

$$50 : 5 = 10, \text{остаток} = 0$$

$$53 : 5 = 10, \text{остаток} = 3$$

$$56 : 5 = 11, \text{остаток} = 1$$

$$59 : 5 = 11, \text{остаток} = 4$$

Как может видеть читатель, это число равно 59. Итак, число 59 – это единственное число между 50 и 60, которое удовлетворяет двум арифметическим требованиям головоломки: (1) если его разделить на 3, то в остатке получится 2; и (1) если его разделить на 5, то в остатке получится 4.

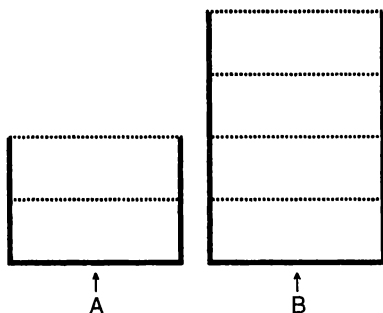
30.

ОТВЕТ

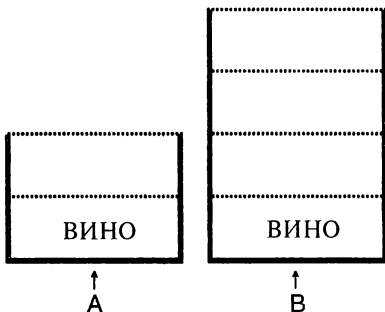
В смеси, находящейся в сосуде С, одна треть вина.

ПОЯСНЕНИЕ

Головоломка сообщает нам, что сосуд В в два раза больше, чем А. Давайте нарисуем два сосуда, так чтобы В был вдвое большего размера, чем А:



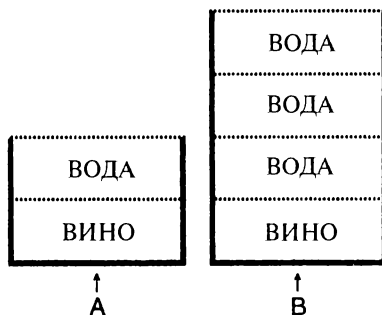
Нам известно, что сосуд А наполнен вином наполовину, а В на одну четверть. Сосуды с вином поэтому выглядят так:



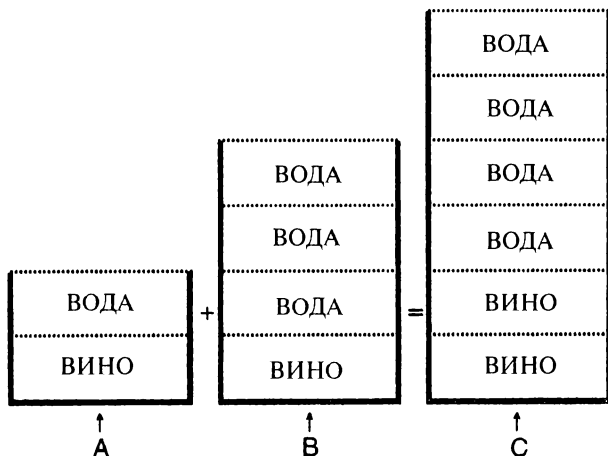
Заметим, что на самом деле в обоих сосудах находится одинаковое количество вина. Почему? Потому что, если мы разделим оба

сосуда на равные части, в сосуде А будет две части, а в сосуде В будет четыре части. Все эти части равны, поскольку В вдвое больше А и каждая из четырех частей сосуда В является такой же, как каждая из двух частей сосуда А.

Давайте теперь наполним оставшиеся емкости обоих сосудов водой, не показывая на рисунке, что она смешивается с вином. На самом деле это не правильное, а лишь условное представление того, что происходит:



Как можно теперь видеть, А содержит две равных доли вина и воды, а В содержит три равных воды и одну долю вина. Как мы показали, все доли в обоих сосудах равны. Поэтому в двух сосудах вместе из шести равных долей в целом две состоят из вина, а четыре из воды. Логически смесь из этих двух сосудов будет содержать две доли вина и четыре доли воды. То есть фактически сосуд С будет содержать в себе:



Вино и вода в сосуде С, разумеется, будут перемешаны, а не отделены друг от друга, как изображено на предыдущем рисунке. Но в этом растворе вино будет составлять две части из шести, или $\frac{2}{6}$, а вода будет составлять четыре части из шести, или $\frac{4}{6}$. В результате смесь в сосуде С будет содержать $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ вина.

31.

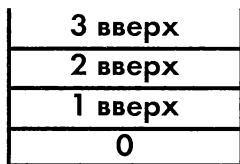
ОТВЕТ

Лестница имеет двадцать пять ступенек.

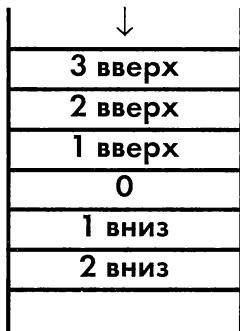
ПОЯСНЕНИЕ

Сначала мы ничего не знаем о ступеньке, на которой находился пожарный, за исключением того, что она средняя. Поэтому давайте нарисует модель лестницы, обозначив эту начальную ступеньку цифрой «0», как если бы это была нулевая точка на числовой оси. Каждую ступеньку выше и ниже «0» можно отождествить с цифрой больше и меньше точки «0». Очевидно, что поскольку «0» является средней ступенькой, под ней и над ней находится одинаковое число ступенек.

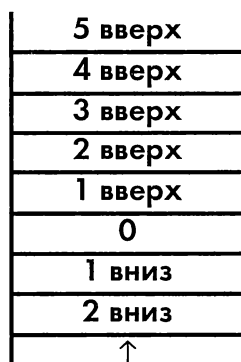
Сначала, как было сказано, пожарный поднялся на три ступеньки от ступеньки «0»:



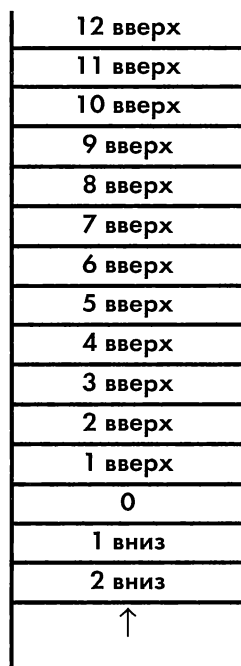
Затем, как было сказано, он спустился на пять ступенек. Таким образом, он спустился на пять ступенек от ступеньки 3 выше «0» и оказался на 2 ступеньки ниже начальной точки:



Далее в головоломке сказано, что пожарный поднялся на семь ступенек. Подъем со ступеньки 2 ниже «0» на семь ступенек означает, что он оказался на 5 ступенек выше начальной точки:



В заключение в головоломке сказано, что пожарный поднялся еще на семь ступенек до крыши. Таким образом, от ступеньки 5 выше «0» он поднялся на семь ступенек до ступеньки 12:



Итак, ступенька 12 является последней ступенькой лестницы. Давайте теперь завершим схему лестницы. Мы знаем, что над ступенькой «0» имеется 12 ступенек. Так как ступенька «0» является средней ступенькой, у лестницы есть также 12 ступенек под ступенькой «0»:

12 вверх
11 вверх
10 вверх
9 вверх
8 вверх
7 вверх
6 вверх
5 вверх
4 вверх
3 вверх
2 вверх
1 вверх
0 = средняя ступенька
1 вниз
2 вниз
3 вниз
4 вниз
5 вниз
6 вниз
7 вниз
8 вниз
9 вниз
10 вниз
11 вниз
12 вниз

Как может видеть читатель, лестница содержит двенадцать ступенек над ступенькой «0», двенадцать ступенек под ступенькой «0» и саму ступеньку «0». Вместе это дает двадцать пять ступенек.

32.

ОТВЕТ

$$2 (2^{n-1})$$

ПОЯСНЕНИЕ

Поскольку членами ряда являются, по существу, степени 2, давайте перепишем их следующим образом:

$$\{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots\}$$

$$\text{Первый член: } 2 = 2 (2^0)$$

$$\text{Второй член: } 4 = 2 (2^1)$$

$$\text{Третий член: } 8 = 2 (2^2)$$

$$\text{Четвертый член: } 16 = 2 (2^3)$$

...

$$n\text{-й член: ?}$$

Заметим, что первый множитель повторяется в каждом члене ряда, в то время как второй множитель последовательно возрастает, увеличиваясь на множитель 2. Давайте выразим показатель степени во втором множителе через номер члена в ряду, n . Заметим в предыдущих записях, что показатель степени в каждом члене на единицу меньше, чем его номер (или номер его места) в последовательности. Теперь мы можем переписать члены ряда следующим образом

$$\text{Первый член: } 2 = 2 (2^0) = 2 (2^{1-1})$$

$$\text{Второй член: } 4 = 2 (2^1) = 2 (2^{2-1})$$

$$\text{Третий член: } 8 = 2 (2^2) = 2 (2^{3-1})$$

$$\text{Четвертый член: } 16 = 2 (2^3) = 2 (2^{4-1})$$

...

$$n\text{-й член: } = 2 (2^{n-1})$$

Поскольку подобным правилом определяются все геометрические прогрессии, мы также можем вывести общую формулу для n -го члена любой геометрической прогрессии. Просто представим ее первый член символом a , а постоянный множитель символом r :

$$\begin{array}{ccc}
 n\text{-й член} & & \\
 2 & (2^{n-1}) & \\
 \downarrow & \downarrow & \\
 a & (r^{n-1}). &
 \end{array}$$

Общий член геометрической прогрессии имеет вид $a(r^{n-1})$.

33.

ОТВЕТ

Сумма всех четных чисел среди первых 100 чисел равна 2550. Ответ не является половиной от 5050, или 2525, как могли бы предположить некоторые читатели.

ПОЯСНЕНИЕ

В этом случае ряд имеет вид:

$$\{2, 4, 8, 10, 12, 14, \dots, 100\}.$$

Запишем под этим рядом тот же ряд в обратном порядке, {100, 98, 96, 94, 92, 88, ..., 2}, и сложим числа в столбцах:

(1)	2	4	6	...	100
	+	+	+		+
(2)	100	98	96	...	2
Сумма	102	102	102	...	102

Теперь возникает уместный вопрос: сколько же четных чисел содержится среди первых 100? Их, конечно же, 50, половина от ста. Итак, сумма четных чисел ряда равна 50 умноженное на 102 и деленное на 2:

$$\text{Сумма} = (50)(102)/2 = 2550.$$

Для получения суммы нечетных чисел, конечно, можно было бы снова использовать этот метод. Однако поскольку мы знаем, что сумма всех чисел от 1 до 100 равно 5050 и что сумма всех четных чисел равна 2550, для того, чтобы вычислить сумму всех нечетных чисел, достаточно вычесть из суммы всех чисел сумму всех четных чисел:

Сумма всех чисел		Сумма всех четных чисел		Сумма всех четных чисел
5050	—	2550	=	2500



Эйлер и Кенигсбергские мосты

34.

ОТВЕТЫ

Возможны такие эйлеровы циклы, отличные от задаваемых на рисунках порядком букв:

A. A-F-E-B-A-D-F-C-B-D-E-C-A

B. A-B-C-E-B-D-E-H-D-G-H-I-E-F-I-J-F-C-A

35.

ОТВЕТЫ

A. Этот граф является эйлеровым циклом, поскольку у него есть только две нечетных вершины, **F** и **H**, в которых сходятся три пути. Та или другая из них может быть начальной или конечной вершиной. Здесь есть один возможный эйлеров цикл, с **H** в качестве начальной вершины: **H-G-D-E-H-I-F-E-B-D-A-B-C-F**.

B. Этот граф не является эйлеровым циклом, поскольку у него есть более чем две нечетных вершины: **B** (= 3), **D** (= 3), **H** (= 3), **F** (= 3).

C. Этот граф не является эйлеровым циклом, поскольку у него тоже есть более чем две нечетных вершины: **B** (= 5), **D** (= 5), **H** (= 5), **F** (= 5).

D. Этот граф является эйлеровым циклом, поскольку у него есть только две нечетных вершины, **F** и **G**, в которых сходятся пять путей. Та или другая из них может быть начальной или конечной вершиной. Здесь есть один возможный эйлеров цикл: **F-C-A-F-H-G-F-D-G-E-B-D-A-B-G**.

36.

ОТВЕТ

Существует много возможностей. Чтобы граф был эйлеровым циклом, он должен иметь самое большее две четных вершины.

37.

ОТВЕТ

Как можно увидеть, у октаэдра есть шесть вершин, двенадцать ребер и восемь граней. Поэтому

$$\begin{aligned}v - e + f &= 2 \\6 - 12 + 8 &= 2.\end{aligned}$$

38.

ОТВЕТ

А. Треугольник имеет три ребра (стороны), три вершины и одну грань:

$$\begin{aligned}v - e + f &= 1 \\3 - 3 + 1 &= 1.\end{aligned}$$

В. Квадрат имеет четыре ребра (стороны), четыре вершины и одну грань:

$$\begin{aligned}v - e + f &= 1 \\4 - 4 + 1 &= 1.\end{aligned}$$

С. Пятиугольник имеет пять ребер (сторон), пять вершин и одну грань:

$$\begin{aligned}v - e + f &= 1 \\5 - 5 + 1 &= 1.\end{aligned}$$

Д. Шестиугольник имеет шесть ребер (сторон), шесть вершин и одну грань:

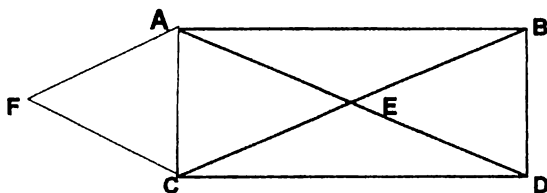
$$\begin{aligned}v - e + f &= 1 \\6 - 6 + 1 &= 1.\end{aligned}$$

В плоских фигурах число вершин равно числу ребер. И все такие вершины имеют лишь одну грань.

39.

ОТВЕТ

Одним из возможных способов превращения прямоугольника в эйлеров цикл является добавление к нему двух внешних ребер, как показано на следующем ниже рисунке. Это сделает вершины **A** и **B** четными (с четырьмя сходящимися в них ребрами) и превратит, таким образом, неэйлеров граф в эйлеров, поскольку у него теперь есть лишь две нечетных вершины (**B** и **D**):



Одним из эйлеровых циклов является следующий: **B-A-F-C-E-B-D-E-A-C-D**.

40.

ОТВЕТ

Головоломку можно решить, только если число инверсий четно. Читателю следует быть уверенным, что любая перестройка, которую он проделает с блоками, такова, что общее число инверсий остается четным.

41.

ОТВЕТ

Невозможно найти два последовательных нечетных числа, произведение которых равно 316.

ПОЯСНЕНИЕ

Причину этого можно показать, перемножив формулы для двух последовательных нечетных чисел. Как мы отмечали ранее, формула нечетного числа имеет вид $(2n + 1)$. Поэтому следующим нечетным числом будет $(2n + 3)$. Перемножим их:

$$(2n + 1)(2n + 3) = 4n^2 + 8n + 3.$$

Сгруппируем члены этого произведения следующим образом:

$$(4n^2 + 8n) + 3.$$

Вынесем за скобку множитель 2:

$$2(2n^2 + 4n) + 3.$$

Член $2(2n^2 + 4n)$ представляет четное число, поскольку любое число, умноженное на два, дает число четное. Поэтому, прибавив к нему 3, мы получаем нечетное число.

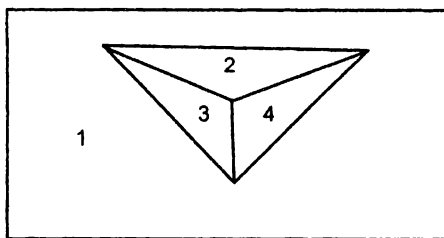


Задача Гурти о четырех красках

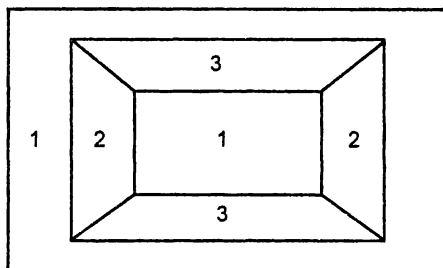
42.

ОТВЕТ

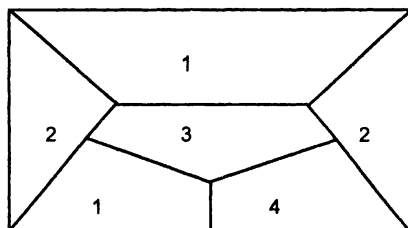
(Возможно иное размещение цветов.)



А. Четыре цвета



В. Три цвета



С. Четыре цвета

1	2	3	1
3	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

Д. Три цвета

43.

ОТВЕТ

Вспомним, что как лента Мебиуса, так и бутылка Кляйна имеют только одну непрерывную поверхность. Таким образом, в каждом случае требуется лишь один цвет.

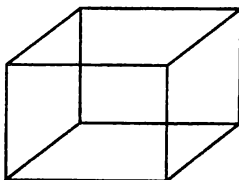
44.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Вспомним, что сумма углов треугольника равна 180° . Если каждый из двух углов треугольника больше 90° , то, сложив их вместе, мы получим сумму, превосходящую 180° даже без третьего угла. А это противоречит тому, что сумма углов треугольника равна 180° . Поэтому лишь один из углов треугольника может превосходить 90° .

45.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



Куб имеет восемь вершин, двенадцать ребер и шесть граней. Подставив эти величины в формулу, покажем, что она является верной:

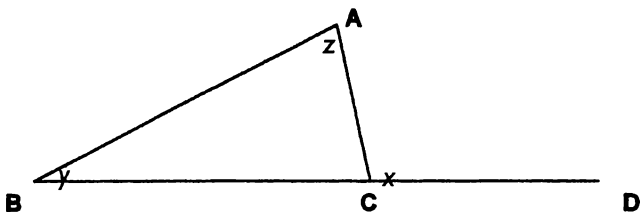
$$v - e + f = 2$$

$$8 - 12 + 6 = 2.$$

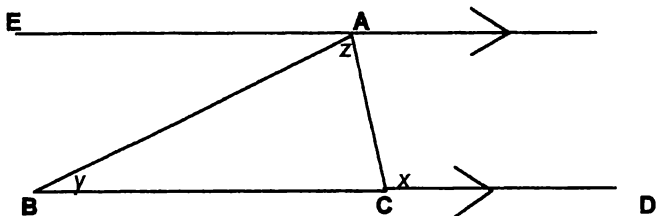
Для того, чтобы доказать это, нам следовало бы показать, что формула верна для всех кубов. Но на самом деле мы это уже сделали. Почему? Потому что само определение куба включает то, что он имеет восемь вершин, двенадцать ребер и шесть граней. Поэтому мы имели дело с общим случаем устройства куба. Исключений быть не может, в противном случае фигура не является кубом.

46.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

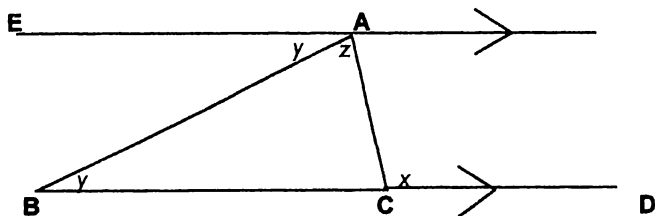


Для того чтобы доказать, что $x + y = z$, мы можем использовать уже установленные факты (теоремы, предложения и т. д.). Вспомним, что если прямая линия пересекает две параллельных прямых, то углы с разными параллельными прямыми на противоположных сторонах этой линии равны. Зная это, проведем через вершину А прямую, параллельную основанию:



Заметим, что $\angle EAB$ равен углу y , поскольку, как было упомянуто, углы с разными параллельными прямыми на противоположных

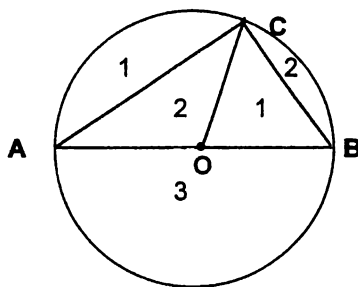
сторонах трансверсали (в этом случае AB) равны. Пометим этот угол буквой y :



Взглянем теперь на другую трансверсаль на этом рисунке, AC . Образующий ею $\angle EAC$ равен x . Поскольку $\angle EAC = y + x$, мы только что доказали, что $x + y = z$ и, таким образом, что внешний угол треугольника равен сумме двух противоположных внутренних углов,

47.

ОТВЕТ



Необходимы четыре цвета

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Заметим, что в этом графе имеется четыре вершины (A - O - B - C), восемь ребер (отрезки AO , AC , OC , OB , CB и дуги AC , CB , AB) и пять граней (1, 1, 2, 2, 3).

Поэтому

$$v - e + f = 1$$

$$4 - 8 + 5 = 1.$$

Пять граней можно рассматривать как «области на карте», а восемь ребер как «границы на карте». Заметим, что разница между их количествами равна 3. Этот анализ Эйлера предполагает, что раз-

ность e и f для карты указывает на число требуемых цветов. Используя разные типы графов, читатель может проверить самостоятельно, является ли эта находка и в самом деле содержательной. А если так, то она была бы еще одним примером простой индукции, дающей верное доказательство.



Головоломка Люка «Ханойские башни»

48.

ОТВЕТ

Это, разумеется, эквивалент варианта головоломки «Ханойские башни» с четырьмя дисками. Поэтому решение потребует $(2^4 - 1)$ или 15 перемещений. Ниже изображена одна из возможных схем перемещений карт (туз = 1, двойка = 2, тройка = 3, четверка = 4), которую читатель может самостоятельно проверить, взяв четыре карты и реально проведя игру.

Перемещение	Место А	Место В	Место С
Начало	1 2 3 4	—	—
1.	2 3 4	1	—
2.	3 4	1	2
3.	3 4	—	1 2
4.	4	3	1 2
5.	1 4	3	2

Перемещение	Место А	Место В	Место С
6.	1 4	2 3	—
7.	4	1 2 3	—
8.	—	1 2 3	4
9.	—	2 3	1 4
10.	2	3	1 4
11.	1 2	3	4
12.	1 2	—	3 4
13.	2	1	3 4
14.	—	1	2 3 4
15.	—	—	1 2 3 4

49.

ПРАВИЛО

Числа n сами являются простыми.

50.

ПРАВИЛО

Давайте внесем в таблицу то, что случится при использовании этих двух правил:

1. Правило 1 (П1) применяется к каждому четному квадрату. Следуя ему, мы должны умножить число зерен на предыдущей нечетной клетке на 2^n .
2. Правило 2 (П2) применяется к нечетному квадрату. Следуя ему, мы должны разделить на два число зерен на предыдущей (четной) клетке:

Первая			
клетка		→	= 1
Вторая			
клетка	(n = 2)	Применяем П1 →	$1 \times 2^2 = 4$
Третья			
клетка		Применяем П2 →	$4 \times \frac{1}{2} = 2$
Четвертая			
клетка	(n = 4)	Применяем П1 →	$2 \times 2^4 = 32$
Пятая			
клетка		Применяем П2 →	$32 \times \frac{1}{2} = 16$
Шестая			
клетка	(n = 6)	Применяем П1 →	$16 \times 2^6 = 1024$
Седьмая			
клетка		Применяем П2 →	$1024 \times \frac{1}{2} = 512$
Восьмая			
клетка	(n = 8)	Применяем П1 →	$512 \times 2^8 = 131\,072$
Девятая			
клетка		Применяем П2 →	$131\,072 \times \frac{1}{2} = 65\,536$
И т. д.			

Оказывается, что результат в каждой последовательной клетке является степенью 2:

Первая клетка	→	1	=	2^0
Вторая клетка	→	4	=	2^2
Третья клетка	→	2	=	2^1
Четвертая клетка	→	32	=	2^5
Пятая клетка	→	16	=	2^4
Шестая клетка	→	1024	=	2^{10}
Седьмая клетка	→	512	=	2^9
Восьмая клетка	→	131 072	=	2^{17}
Девятая клетка	→	65 536	=	2^{16}
И т. д.				

Показатель степени на каждой нечетной клетке на единицу меньше, чем показатель степени на предыдущей четной клетке:

Вторая клетка	→	2^2
Третья клетка	→	2^1
Четвертая клетка	→	2^5
Пятая клетка	→	2^4
Шестая клетка	→	2^{10}
Седьмая клетка	→	2^9
Восьмая клетка	→	2^{17}
Девятая клетка	→	2^{16}

Читатель может обнаружить также и другие схемы.

51.

ОТВЕТ

Покрыть шахматную доску костяшками домино невозможно по той простой причине, что две клетки, которые удалены из нее, обе являются белыми. Костяшка домино, помещенная на шахматную доску, всегда покрывает белую и черную клетку. Если удалены две белых клетки, черных клеток на доске оказывается больше, чем белых. Таким образом, на ней нет одинакового количества черных и белых клеток, что необходимо для того, чтобы покрыть ее всю костяшками домино.

52.

ОТВЕТ

А.

Целое число	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
Кратное 10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	...

В.

Целое число	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
Дробь	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{13}$...

53.

ОТВЕТЫ

А. $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$

В. $\aleph_0 + n = \aleph_0$

С. $\aleph_0 + \aleph_0 = 2\aleph_0 = \aleph_0$

ПОЯСНЕНИЕ

Символ \aleph_0 представляет множество кардинальных чисел. Если вы добавите к нему 1, вы просто вставите еще одно число в числовую ось. Разумеется, не имеет значения, какое количество n чисел вы добавите к числовой оси, вы никогда не выйдете за ее пределы. Подобным же образом вы можете удвоить числовую ось, что бы это ни означало в терминах бесконечностей, вы все равно не выйдете за ее пределы. Эта линия бесконечна и всегда будет иметь одну и ту же мощность, какие бы арифметические операции мы не производили над \aleph_0 .

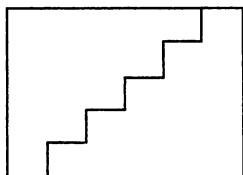
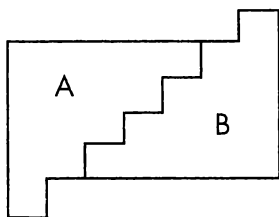


Головоломка Лойда «Таинственное исчезновение»

54.

ОТВЕТ

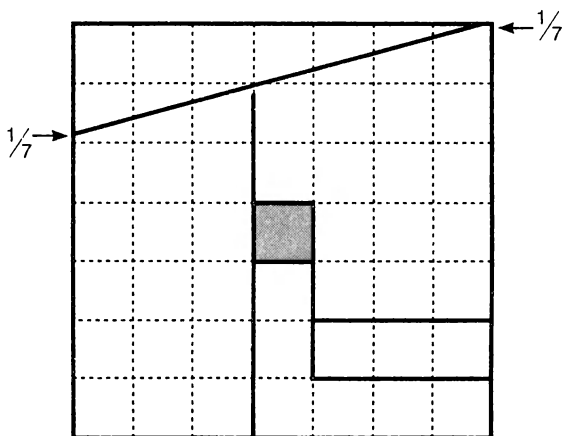
Идея состоит в том, чтобы создать две разделяющиеся части, А и В, которые при их смещении удастся сложить вместе так, чтобы образовался прямоугольник. Этого можно достигнуть, разрезав первоначальную фигуру в виде «зигзага», как изображено на рисунке. Длина каждого отрезка линии разреза должна быть равна длине стороны правого верхнего выступающего квадрата. Таким путем мы получим две сцепленные части А и В. Перемещая А вверх или В вниз и снова сцепив обе части, получаем прямоугольник:



55.

ОТВЕТ

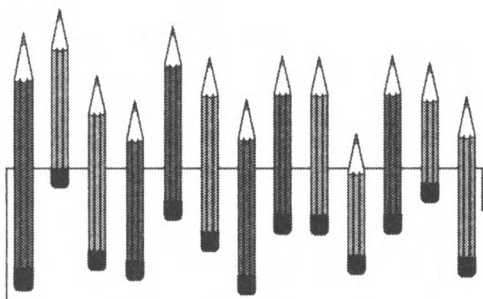
Когда две самых больших части (2 и 3) меняются местами, каждая маленькая клеточка, которая разрезана наклонной линией, становится в высоту чуть больше, чем в ширину. Это означает, что большой квадрат больше не является правильным квадратом. Он становится больше в высоту, увеличиваясь сверху в точности на ту площадь, которая исчезла из центральной дырки:



56.

ОТВЕТ

Число светлых и темных карандашей изменилось: после перестановки частей получилось семь светлых и шесть темных карандашей:



57.

ОТВЕТ

Утка и кролик.

58.

ОТВЕТ

Длина этих карандашей одинакова. Это вариант иллюзии Цолльнера.

59,

ОТВЕТ

Они одинаковы.

ПОЯСНЕНИЕ

Радиус наибольшего круга равен 5 единицам. Длина радиуса внутреннего круга, включающего все, кроме внешнего затененного кольца, равна 4 единицам, три из которых занимает радиус затененной части. Если вы забыли школьную геометрию, напомним, что площадь круга равна πr^2 . Используя эту формулу для внутреннего круга радиуса 3, находим, что $\pi r^2 = \pi 3^2 = 9\pi$. Площадь полного круга радиуса 5 равна $\pi r^2 = \pi 5^2 = 25\pi$. Теперь, чтобы найти площадь внешнего затененного кольца, вычтем из площади полного круга площадь круга радиуса 4, дополняющего кольцо: $\pi r^2 = \pi 4^2 = 16\pi$. Площадь кольца равна $25\pi - 16\pi = 9\pi$. Это доказывает, что две площади равны, несмотря на то, что говорят нам наши глаза.



Парадокс Эпименида «Лжец»

60.

ОТВЕТ

Это предложение приводит к порочному кругу.

ПОЯСНЕНИЕ

Если предположить, что предложение истинно, то его содержание «Это предложение ложно» должно быть и в самом деле верным. Но если это так, то предложение ложно (как и утверждается в нем). Это означало бы, что предложение одновременно истинно и ложно, что логически противоречиво.

Примем противоположное предположение, а именно, что предложение ложно. Каким будет результат этого предположения? Если предложение действительно ложно, то истинно утверждение, противоположное высказанному нами. Но тогда это снова означало бы, что предложение одновременно истинно и ложно.

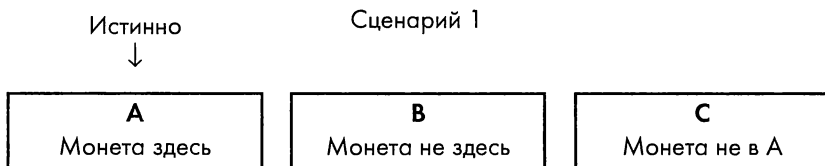
61.

ОТВЕТ

Монета находится в В.

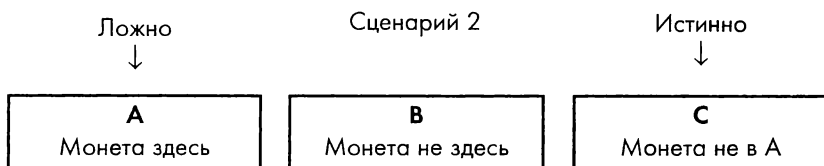
ПОЯСНЕНИЕ

Предположим, что верна надпись в А:



Теперь мы можем быстро убедиться, что надпись в В тоже верна: если монета в А, то, как утверждает надпись в В, она определенно не в В. Но это противоречит условию, что верна самое большее одна надпись. Вместо этого налицо два верных утверждения. Поэтому сценарий 1 мы можем отвергнуть. По дороге, однако, мы выяс-

нили, что надпись в А необходимо ложна: монеты в А нет. Это делает верным утверждение в С, так как оно просто подтверждает, что монета в А не находится.



Поскольку верна самое большее одна надпись, утверждение в В должно быть ложным. Это подтверждает справедливость сценария 2:



Утверждение в В гласит: «Монета не здесь». В соответствии со сценарием 2 это утверждение ложно. Таким образом, верно противоположное утверждение: монета находится в В, противоречащее тому, что утверждает надпись.

62.

ОТВЕТ

Кто сделал шкатулку, определить невозможно.

ПОЯСНЕНИЕ

Предположим, что личность, сделавшая шкатулку, правдива. Тогда написанное является ложью, поскольку утверждает, что шкатулка не сделана правдивым человеком.



Но этого быть не может, поскольку правдивый человек не мог бы сделать ложную надпись. Поэтому личность, сделавшая шкатулку, должна быть лжецом. Если это так, то надпись верна.

Истинно



Эта шкатулка не сделана правдивым человеком.

Но теперь это утверждение оказывается истинным, а лжец не стал бы делать такого правдивого утверждения. Итак, кто сделал шкатулку, определить невозможно.

63.

ОТВЕТ

Это может быть только $x = 0$, поскольку 0 есть единственное значение, которое может принимать x в этом равенстве.

ПОЯСНЕНИЕ

Решая уравнение $x + y = y$ относительно x , получаем $x = 0$:

$$x + y = y.$$

Вычтем y из обеих сторон равенства:

$$x + (y - y) = (y - y)$$

$$x + 0 = 0$$

$$x = 0.$$

Любое другое значение x сделало бы равенство невозможным.

64.

ОТВЕТ

В этом предложении только пять слов. Поэтому оно ложно. Однако если мы превратим его в отрицательное, «В этом предложении не содержится семи слов», то оно будет содержать семь слов, вопреки тому, что в нем сообщается.

65.

ОТВЕТ

Отец человека, рассматривающего фотографию.

ПОЯСНЕНИЕ

Назовем человека, рассматривающего фотографию «смотрящим». Смотрящий является единственным ребенком, поскольку братьев и сестер у него нет. Далее он сообщил нам, что человек на фотографии имеет сына, который является сыном его собственного отца. Поскольку смотрящий является единственным ребенком, он и есть единственно возможный «сын» своего собственного отца. Того самого, что изображен на фотографии.

66.

ОТВЕТ

Продавец книжного магазина потерял книгу за 3 доллара и 7 долларов из своего кармана, всего 10 долларов.

ПОЯСНЕНИЕ

Сначала продавец книжного магазина за книгу стоимостью 3 доллара не получил ничего, поскольку фальшивая банкнота в 10 долларов стоит меньше чем ничего. Таким образом, здесь он потерял 3 доллара. Теперь рассмотрим, что случилось далее. Продавец книжного магазина получил десять банкнот по 1 доллару от продавщицы из магазина музыкальных записей, получившей взамен фальшивую банкноту. Когда продавец книжного магазина вернулся в свой магазин, он отдал покупателю 7 из 10 банкнот по 1 доллару и положил оставшиеся 3 доллара себе в карман.

Когда продавщица из магазина музыкальных записей потребовала обратно свои 10 долларов, в кармане у продавца книжного магазина все еще оставалось 3 доллара из 10 настоящих (другие 7 долларов он отдал покупателю). Итак, он вернул продавщице ее 3 доллара и добавил еще 7 долларов из своего кармана. Поэтому в целом продавец книжного магазина потерял книгу за 3 доллара и 7 долларов из своего кармана, всего 10 долларов.

67.

ОТВЕТ

Для ясности обозначим трех женщин буквами А, В и С. Давайте предположим, что А — именно та женщина, которая определила цвет креста у себя на лбу. Как она это сделала? Она смотрит на В и С и видит, что кресты у них обеих красные. Поэтому она поднимает руку, как ее и проинструктировали. В также видит два красных креста. Поэтому она тоже поднимает руку. С тоже видит два крас-

ных креста и, конечно, тоже поднимает руку. В этот момент А рассуждает следующим образом:

Предположим, что у меня на лбу синий крест. Если это так, то одна из двух других женщин, например, В, знала бы, что ее крест не синий, поскольку иначе С, видящая два синих креста на лбу у меня и у В, не подняла бы руку. Но она подняла руку. Значит, В и С не смогли определить свой цвет. Это означает, что цвет моего креста тоже красный.

68.

ОТВЕТ

Женщины заплатили 27 долларов, из которых 25 долларов остались отелю, а два коридорному.

ПОЯСНЕНИЕ

Первоначально женщины заплатили за комнату 30 долларов. Столько денег оказалось в руках менеджера отеля, когда он понял, что взял с посетительниц слишком много. Он взял из 30 долларов 25, а коридорному дал 5 долларов, чтобы тот вернул их дамам.

Теперь давайте сконцентрируем внимание на женщинах. Каждая получила назад по 1 доллару. Это на самом деле означает, что они заплатили за комнату по 9 долларов. Вместе они заплатили 27 долларов, то есть на 2 доллара больше, чем 25 долларов, которые они должны были заплатить за комнату. Как мы знаем, именно эти 2 доллара и стянул вороватый коридорный!

В итоге ни один доллар не пропал. Женщины заплатили 27 долларов, из которых отель получил 25 долларов, а коридорный 2 доллара.

69.

ОТВЕТ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n / F_{n+1} = 0,618...$$

Заметим, что это «золотое сечение» (глава 3).

ПОЯСНЕНИЕ

Вот отношения нескольких последовательных пар чисел Фибоначчи в порядке из возрастания:

$$1/2 = 0,5$$

$$3/5 = 0,6$$

$$5/8 = 0,625...$$

$$1^3/21 = 0,619...$$

$$3^4/55 = 0,618...$$

$$8^9/144 = 0,618...$$

$$2^{33}/377 = 0,618...$$

...

Эти отношения стремятся к 0,618...

Вспомним, что если F_n — произвольное число в последовательности Фибоначчи, то символ F_{n+1} обозначает число, следующее за ним.

70.

ОТВЕТ

Если вы поставите циркуль в точку пересечения и отложите им длину любого половинного отрезка, вы сможете нарисовать круг, проходящий через концы этих линий.

ПОЯСНЕНИЕ

Главным условием, определяющим круг, конечно, является то, что все его радиусы равны. Поскольку линии, исходящие из точки пересечения, рисуются одинаковыми (поскольку делятся точкой пополам), эта точка действительно является центром круга радиуса r .



Магический квадрат Ло Шу

71.

ОТВЕТ

16	2	12
6	10	14
8	18	4

Постоянная магического квадрата равна 30.

72.

ОТВЕТ

7	6	11
12	8	4
5	10	9

Постоянная магического квадрата равна 24.

73.

ОТВЕТ

2,00	0,25	1,50
0,75	1,25	1,75
1,00	2,25	0,50

Постоянная магического квадрата равна 3,75.

74.

ОТВЕТ

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Постоянная магического квадрата равна 111.

75.

ОТВЕТ

$2\frac{1}{2}d$	$5d$	$1\frac{1}{2}d$
$2d$	$3d$	$4d$
$4\frac{1}{2}d$	$1d$	$3\frac{1}{2}d$

Постоянная магического квадрата равна $9d$.

76.

ОТВЕТ

3	71	5	23
53	11	37	1
17	13	41	31
29	7	19	47

Постоянная магического квадрата равна 102.

77.

ОТВЕТ

	2	3			6	7	
9			12	13			16
17			20	21			24
	26	27			30	31	
	34	35			38	39	
41			44	45			48
49			52	53			56
	58	59			62	63	

→

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

ПОЯСНЕНИЕ

Заметим, что магический квадрат порядка 8 можно рассматривать как составленный из четырех более маленьких квадратов порядка 4. Поэтому нарисуем диагонали в каждом из четырех квадрантов. После того как вы это сделаете, поступайте, следуя алгоритму.

78.

ОТВЕТ

1. Определите постоянную магического квадрата (15).
2. Определите, какие из восьми троек, составленных из первых девяти цифр, в сумме дают 15, так как только эти тройки мо-

гут быть включены в восемь столбцов, строк и диагоналей, составляющих магический квадрат порядка 4:

$$9 + 5 + 1 = 15$$

$$9 + 4 + 2 = 15$$

$$8 + 6 + 1 = 15$$

$$8 + 5 + 2 = 15$$

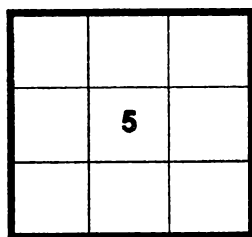
$$8 + 4 + 3 = 15$$

$$7 + 6 + 2 = 15$$

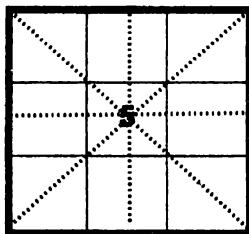
$$7 + 5 + 3 = 15$$

$$6 + 5 + 4 = 15$$

3. Найдите здесь число, встречающееся наибольшее число раз, поскольку именно его следует поместить в среднюю клетку (5).



4. Теперь методом проб и ошибок распределите тройки, начиная со средней клетки, «радиально» от нее.



Для завершения магического квадрата имеются, конечно, разные способы.



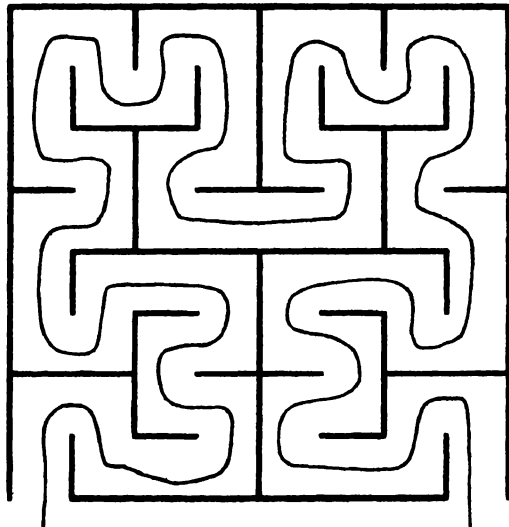
Критский лабиринт

79.

ОТВЕТ

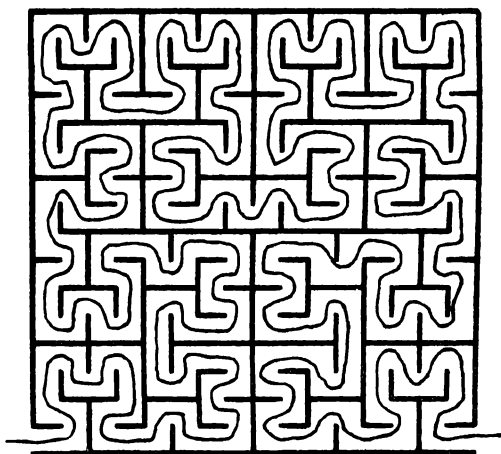
Решение на самом деле очень простое. Этот лабиринт имеет горизонтальный «проход» на левой стороне, идущий от пятой от внешнего края линии ко второй линии от центра. Если вы нарисуете соответствующий проход с правой стороны (от второй линии от центра до пятой от внешнего края линии), то лабиринт сведется к простому пути.

80.



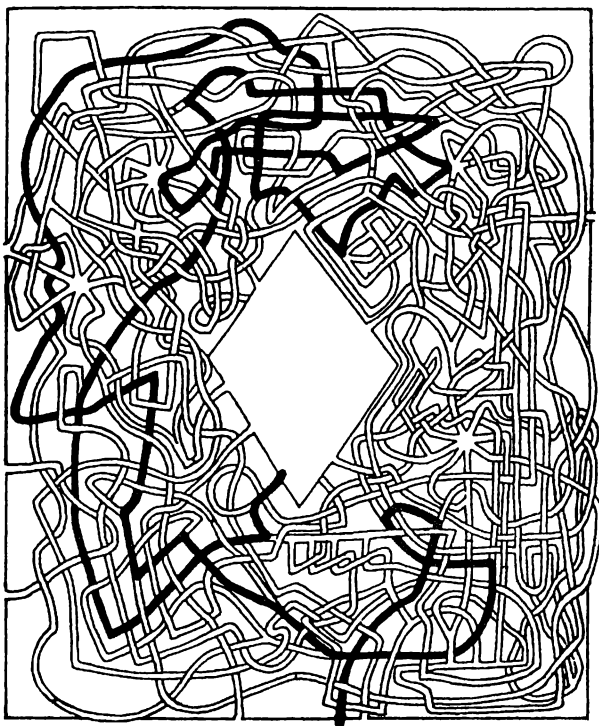
81.

ОТВЕТ



82.

ОТВЕТ



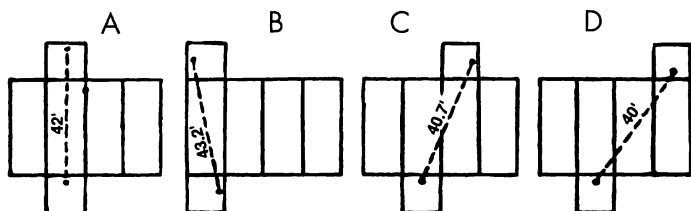
83.

ОТВЕТ

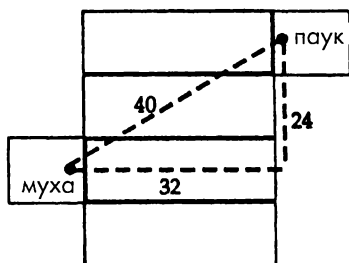
Кратчайший путь составляет 40 футов.

ПОЯСНЕНИЕ

Развернуть комнату (которая представляет собой параллелепипед) возможно четырьмя различными путями (А, В, С и D). Читатель сам может установить это, сделав модель комнаты из бумаги и затем развернув ее четырьмя указанными ниже способами:



Ясно, что путь D является наилучшим путем. Он является гипотенузой прямоугольного треугольника:



84.

ОТВЕТ

Двенадцатым треугольным числом является 78.

ПОЯСНЕНИЕ

Правило следующее:

Первое треугольное число: $1 = 1$ Второе треугольное число: $3 = 1 + 2$ Третье треугольное число: $6 = 1 + 2 + 3$

Четвертое треугольное число: $10 = 1 + 2 + 3 + 4$

...

n -е треугольное число: $\dots = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$

Легко видеть, что последовательные треугольные числа получаются с помощью суммирования соответствующего их номеру количества первых целых чисел. Например, третье треугольное число является суммой первых трех целых чисел, седьмое треугольное число является суммой первых семи целых чисел, и так далее.

Таким образом, двенадцатое треугольное число является суммой первых двенадцати целых чисел. Теперь, чтобы показать, что оно равно 78, мы можем использовать формулу суммирования из главы 5:

$$\text{Sum}_{(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$n = 12$$

$$\text{Sum}_{(12)} = \frac{12(12+1)}{2} = 78.$$

85.

ОТВЕТ

Правило заключается в том, что каждое квадратное число получается с помощью суммирования соответствующего его номеру количества первых нечетных чисел: например, третье квадратное число является суммой первых нечетных целых чисел, девятое треугольное число является суммой первых девяти нечетных чисел, и так далее:

Первое квадратное число: $1^2 = 1$

Второе квадратное число: $2^2 = 4 = 1 + 3$

Третье квадратное число: $3^2 = 9 = 1 + 3 + 5$

Четвертое квадратное число: $4^2 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$

...

Девятое квадратное число: $9^2 = 81 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17$

ГЛОССАРИЙ

абак Прибор, показывающий значение числа посредством его положения, появился в Древнем Китае.

аксиома Самоочевидная или общепризнанная истина («две прямые пересекаются в одной и только в одной точке»).

алгебра Обобщение арифметики, в котором символы, обычно буквы алфавита, представляют числа или элементы числовых множеств.

алгоритм Регулярная процедура для решения задач, которую можно использовать многократно.

аналитическая геометрия Изучение геометрических фигур и их свойств главным образом с помощью алгебраических операций над переменными, определяемыми в терминах декартовых координат.

арифметика Изучение чисел всех типов путем сложения, вычитания, умножения и деления.

арифметическая прогрессия Ряд, подобный ряду $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$, в котором каждый член получается прибавлением постоянного числа к предыдущему члену.

бесконечный ряд Ряд, в котором нет последнего члена или последнего значения.

бутылка Кляйна Односторонняя поверхность, не имеющая ни внутренней, ни наружной стороны, образованная путем введения маленького открытого конца конической трубки внутрь ее самой через боковую сторону и присоединения его к большому открытому концу трубки.

гамильтонов цикл Путь, идущий по графу, который проходит через каждую вершину графа лишь один раз, за исключением, воз-

можно, начальной и конечной точек, которые могут оказаться в одной вершине.

гематрия Древнее искусство, основным утверждением которого было то, что сумма числовых значений букв в имени может быть использована для предсказания таких вещей, как судьба его владельца.

геометрическая прогрессия Ряд, подобный ряду $\{1, 3, 9, 27, 81, \dots\}$, в котором для получения следующего члена каждый член умножается на постоянное число.

геометрия Изучение свойств и взаимосвязей точек, линий, углов, поверхностей и объемных тел.

гипотенуза Сторона прямоугольного треугольника, лежащая напротив прямого угла.

головоломка Задача, бросающая нам вызов и требующая найти неочевидный ответ.

граф Фигура, содержащая вершины, ребра и грани.

двойственные фигуры Фигуры, которые предстают для нашего глаза в один момент времени чем-то одним, в другой момент выглядят как нечто другое.

дедукция Процесс рассуждений, показывающий, почему заключение с необходимостью следует из утверждаемых предпосылок; вывод путем рассуждений от общего к частному; приложение общих или предварительных знаний к частной задаче.

декартова плоскость Плоскость, все точки которой описываются их координатами или определяются пересечением двух перпендикулярных прямых.

делитель Одна из двух или более величин, делящая заданную величину без остатка: например, 2 и 3 являются делителями 6, поскольку $6 = 2 \times 3$.

десятичное число число, построенное с использованием десяти цифр (включая 0), в котором каждая цифра обозначает множи-

тель при степени 10: например, цифра 2 при нулевой степени 10 в числе 2, при первой степени 10 («двадцать») в числе 25 и при второй степени 10 («двести») в числе 250.

дифференциальное исчисление Математическое изучение таких понятий, как скорость изменения, наклон кривой в определенной точке, и вычисление площади, ограниченной кривыми.

дробь Выражение, указывающее отношение двух величин: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, и так далее.

зависимая переменная Математическая переменная, значение которой определяется значением, принимаемым *независимой переменной*.

золотое отношение (Известно также как *золотое сечение* или *божественная пропорция*); бесконечная дробь 0,6180339...

индукция Процесс доказательства того, что некое утверждение должно считаться истинным, если его истинность можно доказать для 1-го и $(n + 1)$ -го случаев; рассуждение ведущее от частных фактов к общему заключению.

иррациональное число Любое число, которое не может быть выражено как целое число или отношение двух целых чисел, p/q ($q \neq 0$); например, $\sqrt{2}$.

кардинальное число Число, такое как 4, 15 или 948, используемое при счете, чтобы указать величину, но не порядок.

квадратное число Любое число, которое может быть представлено в виде квадратной фигуры {1, 4, 9, 16, ...}.

комбинаторика Область математики, включающая изучение группирований и размещений конечных множеств элементов, а также связанных с ними вычислений.

коммутативность Свойство сложения и умножения, согласно которому изменение порядка чисел не меняет результата операции: $a + b = b + a$ (например, $2 + 3 = 3 + 2$); $a \times b = b \times a$ (например, $2 \times 3 = 3 \times 2$).

корень число, возведенное в какую-либо степень (3 в 3^2 , 4 в 4^5 , и так далее); также называется *основанием*.

лабиринт Запутанная структура пересекающихся проходов, через которую трудно найти путь.

логос Способность ума, позволяющая людям рассуждать и мыслить рефлексивно, которую древние греки считали основой рациональности и языка.

Люка последовательность Последовательность чисел, начинающаяся с 2 $\{2, 1, 3, 4, 7, \dots\}$, в которой каждое число равно сумме двух предыдущих чисел.

магический квадрат Квадрат, содержащий числа, размещенные в строках и столбцах таким образом что сумма чисел в каждом столбце, каждой строке и диагонали одна и та же.

матрица Размещение символов в строки и столбцы.

Мерсенна число Число, образованное с помощью формулы $(2^n - 1)$.

метаязык Язык, используемый для описания других языков.

Мёбиуса лист Непрерывная односторонняя поверхность, которую можно получить из прямоугольной ленты, повернув один ее конец на 180° и прикрепив его к другому концу.

многоугольник Замкнутая плоская фигура, ограниченная тремя или более отрезками (треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник, и т. д.).

мощность Термин, относящийся к использованию кардинальных (положительных целых) чисел при вычислении «размеров» бесконечных множеств.

мышление посредством озарения Вспышка озарения, которая возникает в воображении при обдумывании различных аспектов головоломки.

невозможная фигура Фигура, которая выглядит противоречащей здравому смыслу.

независимая переменная Переменная, значение которой определяет значения других переменных.

непланарный граф Многомерный граф.

общий случай Случай, который относится к целой категории или к каждому члену класса или категории: ко всем точкам, ко всем углам, ко всем числам, и так далее.

оптическая иллюзия Визуально воспринимаемый образ, который является обманчивым или вводящим в заблуждение.

основание Число, возводимое в ту или иную степень (3 в 3^2 , 4 в 4^5 , и так далее).

остроугольный треугольник Треугольник, все углы которого меньше 90° .

отрицательное число Число, величина которого меньше нуля.

парадокс Утверждение, приводящее к противоречию, несмотря на то, что оно основано на правильной дедукции из приемлемых предположений.

Паскаля треугольник Треугольник, состоящий из целых чисел, в котором любое число в заданном ряду есть сумма двух чисел, лежащих в треугольнике непосредственно над ним.

Пифагора теорема Квадрат *гипотенузы* (c) прямоугольного треугольника равен сумме квадратов двух его других сторон (a , b): $c^2 = a^2 + b^2$.

Пифагора тройка Множество из трех чисел, например, 3, 4 и 5, связанных друг с другом соотношением, выражаемым *теоремой Пифагора* ($5^2 = 3^2 + 4^2$).

планарный граф Двумерный граф.

подстановка Группирование элементов, взятых из большего множества, с учетом их порядка; например, создание двухэлементной подстановки из множества четырех элементов (A, B, C и D) дало бы четыре кандидатуры для первого выбираемого элемента и

три оставшиеся для выбора второго элемента, то есть двенадцать подстановок.

показатель степени Маленький числовой верхний индекс, показывающий, сколько раз величина умножается на саму себя:

$$n^4 = n \times n \times n \times n.$$

положительное число Число, величина которого больше нуля.

постоянная магического квадрата Сумма чисел в каждом столбце, каждой строке и диагонали магического квадрата.

постулат Любое утверждение, которое не требует доказательства, поскольку оно либо самоочевидно, либо просто принимается в качестве гипотезы.

предел Число или точка, к которой стремится функция.

предложение Нечто, выражаемое в утверждении.

приведение к противоречию Опровержение утверждения путем демонстрации того, что его неизбежное следствие приводит к противоречивому результату или несовместимости.

простое число Натуральное число, не имеющее других делителей, кроме 1 и самого себя; например, 1, 3, 5, 7, 19, и так далее.

прямоугольный треугольник Треугольник, один из углов которого равен 90° .

равенство Утверждение, выражающее равенство двух выражений, обычно записанное в виде линейной строки символов, разделенных на левую и правую части, соединенные знаком равенства ($x + 3 = 4$).

рациональное число Число, которое может быть выражено в виде целого числа или отношения целых чисел, за исключением нуля в качестве делителя; его общая форма имеет вид p/q ($q \neq 0$).

римская система Система обозначения цифр с помощью семи букв алфавита, каждой из которых приписано определенное числен-

ное значение: I = один, V = пять, X = десять, L = пятьдесят, C = сто, D = пятьсот, M = тысяча.

рисование перспективы Техника, с помощью которой трехмерное пространство может быть убедительно представлено в двумерном пространстве.

ряд Последовательность чисел, называемых *членами*, порождаемая некоторым правилом; например, $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ является рядом, в котором каждый член порождается прибавлением числа 2 к предыдущему члену.

самоприменимость Применение чего-либо к самому себе.

светотень Техника использования света и тени в живописи и рисунке.

система координат Система точек на плоскости, определяемых с помощью двух пересекающихся осей.

силлогизм Форма дедуктивного рассуждения, состоящая из большой посылки, малой посылки и вывода; например, «Все люди смертны» является большой посылкой; «Я — человек» является малой посылкой; «Следовательно, я смертен» является выводом.

системный анализ Исследование процедуры, определяющей желаемый результат и наиболее эффективный метод получения этого результата.

совершенное число Положительное целое число, равное сумме своих целых делителей; например, 6 является совершенным числом, поскольку три его делителя, 1, 2 и 3 ($6 = 1 \times 2 \times 3$), дают в сумме 6 ($6 = 1 + 2 + 3$).

составное число Целое число, составленное из множителей, например, $4 = 2 \times 2$.

сочетание Группирование элементов, взятых из большего множества, безотносительно к порядку элементов в каждой группе; например, выбор одновременно двух элементов из множества че-

тырех элементов (A, B, C и D) дает шесть комбинаций объектов: AB, AC, AD, BC, BD, CD.

теорема Утверждение, которое было или должно быть доказано на основе ясных предположений.

теория графов Область математики, изучающая *графы*.

теория множеств Область математики, изучающая свойства множеств.

топология Область математики, изучающая те свойства графов или фигур, которые остаются неизменными при сгибании, скручивании, растягивании или деформировании каким-либо иным образом.

трансверсаль Прямая, пересекающая множество других прямых.

трансфинитное число Число, большее любого конечного числа.

треугольное число Любое число, которое может быть представлено в виде треугольной фигуры {1, 3, 6, 10, . . .}.

тупоугольный треугольник Треугольник, один из углов которого больше 90° .

уравнение Утверждение, выражающее равенство двух выражений, обычно записанное в виде линейной строки символов, разделенных на левую и правую части, соединенные знаком равенства ($x + 3 = 4$).

факториал Произведение всех положительных целых чисел от 1 до заданного числа (записанных в обратном порядке): например, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Фибоначчи числа Числа из *последовательности Фибоначчи*.

Фибоначчи последовательность Последовательность чисел {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .}, в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел.

функция Переменная, связанная с другой переменной так, что каждое принимаемое ею значение зависит от значения этой другой переменной: например, в выражении $2x = y$ для каждого значения принимаемого x существует одно и только одно значение y ; таким образом y есть функция x .

целое число Элемент множества, состоящего из натуральных чисел $\{1, 2, 3, \dots\}$, отрицательных чисел $\{-1, -2, -3, \dots\}$ и нуля (0).

эйлеров цикл Путь, проходящий через все ребра графа в точности по одному разу.



С тех пор как Сфинкс загадал свою легендарную загадку Эдипу, парадоксы, загадки и головоломки всех сортов ставят в тупик и изумляют человека. Почему так происходит? Какую информацию дают головоломки о природе человеческого мышления? Помогают ли они изучать математику?

Книга, которую вы держите в руках, отвечает на эти вопросы, приглашая вас в интерактивное путешествие по самым известным, интригующим и остроумным головоломкам, которые сыграли большую роль в формировании математики.

ISBN 978-5-98986-272-6



9 785989 862726